ISSN 0016–5441

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

# GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

5

DIN CUPRINS:


- FORMULE DE INTEGRARE NUMERICĂ
- PROBLEME DATE LA TESTUL DE LA BAIA MARE, 1989
- NOTE MATEMATICE
- OLIMPIADA LOCALĂ, BUCUREŞTI ŞI PRAHOVA, 1989
- PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ŞI LICEU
- PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, PENTRU GIMNAZIU, PENTRU LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. şi O.B.M., PROBLEME DE INFORMATICĂ
- RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME.


ANUL XCIV Nr. 5/1989

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

## SUMARUL


1. Matematicile aplicate, o nouă rubrică a Gazetei Matematice, de Acad. *N. Teodorescu* . . . . . 145
2. Formule de integrare numerică, de *Valter Olariu* . . . . . 147
3. Problemele date la testul din Tabăra națională de matematică, Baia Mare, ianuarie 1989, de *Mircea Becheanu* și *Ioan Tomescu* 155
4. Asupra unor sume de combinări, de *Dorin Andrica* . . . . . 157
5. Asupra unor probleme privind aplicații ale trinomului de gradul II, de *Ileana-Simona Pascu* . . . . . 159
6. O nouă metodă pentru calculul sumei puterilor asemenea ale primelor $n$ numere naturale, de *Silviu Stössel* . . . . . 160
7. Concursul de matematică, etapa locală, București, 19 februarie 1989 . . . . . 163
8. Concursul de matematică, etapa locală, Prahova, 12 februarie 1989 . . . . . 166
9. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 9426, E : 9433, E : 9437, E : 9442, E : 9447, E : 9451, E : 9453 ; E : 9465, E : 9457) 168
10. Probleme rezolvate pentru liceu (21442, 21437, 21380, 21385, 21461, 21482) . . . . . 172
11. Probleme pentru ciclul primar (33—40) . . . . . 176
12. Probleme pentru gimnaziu (E : 9707 — E : 9730) . . . . . 177
13. Probleme pentru liceu (21765 — 21792) . . . . . 180
14. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 584 — O : 586) 184
15. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C :893 — C :904) 185
16. Probleme de informatică (I : 347—I : 349) . . . . . 187
17. Rubrica rezolvitorilor de probleme . . . . . 188


ANUL XCIV 5 1989


### COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu ; lector univ. Toma Albu ; lector univ. Horea Banea, Brașov ; lector univ. Octavian Băscă ; conf. univ. Dan Brânzei, Iași ; prof. Constantin Cărbunaru ; prof. Marcel Chiriță ; prof. Pál Dályay, Tg. Mureș ; lector univ. Inocențiu Drăghicescu ; prof. Ioana Drăghici ; inv. Alexandrina Dumitru ; prof. Ilie Gheorghilă ; prof. Adrian Ghioca, Sinaia ; cercet. princip. Gheorghe Gussi ; lector univ. Stere Ianuș ; prof. Ștefan Kadar, Baia Mare ; lector univ. Constantin Niță ; prof. univ. Árpad Pál, Cluj-Napoca ; lector univ. Laurențiu Panaitopol ; prof. Olimpia Popescu, Ploiești ; matem. Paul Radovici-Mărculescu ; lector univ. Gheorghe Sireți ; lector univ. Ioan Tomescu ; prof. Mircea Trifu, Giurgiu ; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

### REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat) : Acad. N. Teodorescu ; redactori principali : prof. Alexandru Constantinescu, prof. Ilie Ilieșcu, prof. Liviu Pîrșan, prof. Marcel Țena ; redactori principali onorifici : prof. C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Eliferie Rogai ; redactor : Liliana Balaci.

Responsabil de număr : Prof. Marcel Țena.



### ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53, București, 1, Cod. 79543.
Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import-Presă, Calea Griviței nr. 64—66, P.O. Box 12—201, Telex 10376 Prsfir București ROMÂNIA.


Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCIV nr. 5 Mai 1989

# MATEMATICILE APLICATE. O NOUĂ RUBRICĂ A GAZETEI MATEMATICE

de Acad. Nicolae Teodorescu

## § 1. Matematica, în cadrul revoluției tehnico-științifice în țara noastră

În Gazeta Matematică, întemeiată de cei patru stîlpi, *Ion Ionescu, Gheorghe Țițeica, Andrei Ioachimescu* și *Vasile Cristescu*, dintre care trei ingineri, articolele și problemele de matematici aplicate ocupau un loc de seamă. Nu numai faptul că trei dintre fondatori, părtași la realizarea Podului de la Cernavodă, erau ingineri și profesori la Școala de Poduri și Șosele din București, constituia această orientare a primei noastre reviste de matematici elementare, ci locul pe care matematica începea să-l cîștige în fundamentarea științelor exacte și a științelor tehnice. Pentru afirmarea și fructificarea acestei poziții și a rolului matematicii în cultura profesională a tineretului nostru, pentru cultivarea îndemnului spre promovarea matematicii în rîndul cunoștințelor esențiale pentru orice profesionist, Gazeta Matematică, prin numeroși colaboratori, ingineri, profesori și militari din armele tehnice de geniu, artilerie și aviație, a publicat de-a lungul existenței sale prestigioase articole, note și probleme din domeniul matematicii aplicate, instituind chiar și concursuri cu premii pentru lucrări în acest domeniu.

Revoluția tehnico-științifică a secolului nostru, care realiza saltul calitativ de la revoluția industrială și științifică a secolului trecut la cea pe care o trăim azi în viața de toate zilele cu o intensitate crescîndă de la an la an, a dat științei comandamentul de a realiza simbioza cu tehnica și tehnologia și prilejul de a deveni în această simbioză unul din factorii determinanți ai producției materiale și chiar spirituale.

Acest privilegiu i-a creat însă și responsabilități de mare amploare, pe care nu le-ar fi putut satisface fără introducerea caracterului inter și multidisciplinar în cercetarea și în învățămîntul diverselor ei ramuri și discipline.

În primul rînd, matematica a trebuit să treacă pe primul plan în pregătirea profesională atît a cercetătorilor, cît și a tehnicienilor și pe un plan de necesitate majoră în pregătirea mmmatematice la această cerință esențială, ceea ce s-a făcut în mod inegal în diversele țări de pe glob angajate în revoluția tehnico-științifică. cetătorilor din industrie și economie. Aceasta a necesitat o adaptare a învățămîntului și cercetării

În țara noastră, construcția socialistă a adus matematica în fruntea pregătirii profesionale a oamenilor muncii de toate categoriile și în primul rînd a celor din producția industrială, din economie și din cercetarea științifică și învățămînt, ceea ce a condus la o înflorire fără seamăn în trecut a cercetării matematice. Pentru cultivarea matematicii în rîndurile tineretului studios, Gazeta Matematică s-a restructurat, devenind o revistă adresată unui număr mare de elevi și studenți, care în ultimii 15 ani a devenit impresionant, numărul abonaților revistei depășind 210.000, iar solicitarea revistei fiind încă mai mare.

## § 2. Lipsuri în tematica Gazetei Matematice

Nu avem intenția de a pune în evidență calitățile și meritele cîștigate prin această restructurare, mai ales în acești 15 ani, ci dimpotrivă, să recunoaștem o lipsă gravă în integrarea revistei în strategia la nivel național a pregătirii tineretului nostru pentru a satisface cerințele profesionale în domeniul matematicii în sectorul aplicațiilor atît de numeroase și de neașteptate



Scanned with OKEN Scanner

ale acesteia. Avem un învățămînt preuniversitar, gimnazial, liceal și profesional cu caracter industrial, cu practică în producție, cu discipline tehnice și economice, care urmărește formarea cadrelor necesare etapelor succesive ale construcției socialiste multilateral dezvoltate în toate sectoarele și această pregătire cere stăpînirea și folosirea cunoștințelor de matematică adecvate fiecărui sector.

Totuși, această orientare structurală nu se reflectă în conținutul tematic actual al Gazetei Matematice, decît foarte rar. Nu găsim în revistă articole de matematici aplicate, nici note și nici măcar probleme propuse. În învățămîntul liceal ponderea disciplinelor tehnice și tehnologice este importantă, dar în revista noastră nu apar probleme de modelare matematică din aceste discipline. Nu găsim nici probleme de mecanică, deși există licee de matematică-mecanică, nu găsim probleme de fizică matematică deși liceele de matematică-fizică sînt cele mai căutate de tineretul nostru.

La ultima reformă a învățămîntului de acum 12 ani a fost introdus în învățămîntul liceal la aceste licee și la cele de informatică un grup de discipline intitulate global *„matematici aplicate în tehnica de calcul"*, care trebuiau, după titulatura lor, să pregătească pe elevi în vederea folosirii calculatorului electronic și a tehnicilor de calcul electronic. Gazeta Matematică a introdus de mai mulți ani o rubrică a problemelor de informatică, ceea ce a suprins pe mulți dintre colaboratorii și sprijinitorii fideli ai acestei reviste. În primii patru ani nu am primit nici o soluție la problemele propuse în această rubrică, nimeni dintre cei care erau în măsură să predea și să promoveze grupul de discipline menționat, nimeni dintre numeroșii elevi talentați, olimpiadiști, cîștigători ai concursului anual al rezolvitorilor, nu a răspuns inițiativei noastre. Totuși, începînd de acum cîțiva ani, lucrurile s-au schimbat și problemele de informatică și-au găsit rezolvitori, propunători și chiar enunțuri și soluții originale și atractive.

Prin urmare, acolo unde s-a insistat și elevii au fost îndrumați, s-au deschis porți spre informatică și interesul este mereu în creștere.

În ceea ce privește matematicile aplicate, pînă în prezent nu putem spune același lucru. Societatea de Științe Matematice a editat, cu puțin înainte de organizarea liceelor pe specialități tehnice, cu scopul de a veni în întîmpinarea elevilor și profesorilor o „Culegere de probleme de matematici aplicate" dar nu a realizat succesul așteptat. Și astăzi mai avem un număr de peste 100 volume, care nu și-au găsit amatori, deși materialele erau semnate de autori cunoscuți și apreciați.

Nu avem în Gazeta Matematică nici *probleme de calcul numeric* și *calculul probabilităților*, deși astăzi calculatorul personal este pus la dispoziția elevilor tocmai pentru stăpînirea și aplicarea tehnicilor de calcul.

## § 3. Înlăturarea acestor lipsuri printr-o rubrică nouă de matematici aplicate

Ne propunem după această autocritică fără reticențe, să înlăturăm aceste lipsuri din tematica revistei noastre, urmînd de altfel exemplul multor reviste străine de matematici elementare, mai puțin răspîndite prin tirajele lor decît Gazeta Matematică, dînd urmare îndemnurilor și recomandărilor Biroului Consiliului S.S.M. și propriilor noastre puncte de vedere.

Deschidem o nouă rubrică intitulată *„Articole, note și probleme de Matematici Aplicate"*, începînd cu articolul ce urmează în acest număr al Gazetei Matematice, intitulat *„Formule de integrare numerică"*, semnat de prof. *Valer Olariu*.

Dorim ca cititorii revistei să folosească din plin inițiativa conducerii S.S.M. studiind cu atenție și cu plăcere articolele și notele de matematici aplicate pentru a le fructifica, așa cum fac, cu asiduitate și adesea cu ingeniozitate cu articolele și notele de matematici teoretice și teoretizante, care abundă în revistă și care au cîștigat numeroși tineri pentru cercetarea matematică, deschizîndu-le orizonturi pe care apoi, prin muncă rodnică și creativă, le-au lărgit ei înșiși.

Domeniul matematicilor aplicate este încoronat de operele tuturor marilor înaintași, creatori ai matematicii moderne și ai matematicii actuale. Începînd cu *Fibonacci*, autorul celebrului șir, care își găsește de-a lungul veacurilor aplicații în fenomenele vitale, vom găsi printre cei care și-au căutat inspirația, adesea generată, pe *Galilei*, *Fermat*, *Descartes*, *Huyghens*, pe *Newton*, creatorul mecanicii teoretice, al calculului infinitezimal, toate aceste geniale descoperiri pentru a da lumii un răspuns la problema milenară a concepției despre univers prin teoria atracției universale, pe *D'Alambert*, pe *Lagrange*, pe *Euler*, pe familia *Bernoulli*, pe *Fourier*, pe *Cauchy*, pe *Bolyai* și *Lobacevski*, care alături de *Gauss* și *Riemann*, au deschis lui *Lorentz* și *Einstein* calea spațio-temporală spre teoria relativității restrînse și generalizate. Aceștia au urmat, celor care au desăvîrșit secolul al XVIII-lea ca *Stirling*, *Clairaut*, *Hospital*, *Monge*, *Laplace*, *Legendre*, *Ricalli*, *Moinre*, *Frézier*, *Bayes*, *Simpson*, *Lamberl*, *Cotes*, *Buffon*, *Carnot*, *Koenig*, *Maupertuis*.



Scanned with OKEN Scanner

## § 4. Prestigiul trecut şi actual al matematicilor aplicate. Nume celebre de creatori.

Secolul al XIX-lea, al revoluţiei ştiinţifice, în care au apărut ştiinţele tehnice şi au înflorit fizica matematică, teoria probabilităţilor şi mecanica mediilor continue a fost ilustrat, în afară de cei citaţi ca stîlpi ai noului edificiu al matematicii, bazată pe rigoare şi inspiraţii din marile probleme ale modelării matematice, de un mare număr de personalităţi covîrşitoare. Vom cita pe *Minkovski*, pe *Liouville*, pe *Jacobi*, pe *Boole*, pe *Hermite*, pe *Weierstrass*, pe *Cayley*, pe *Hamilton*, pe *Kummer*, pe *Abel* şi *Galois*, pe *Sturm*, pe *Dirichlet*, pe *Bessel*, pe *Poisson*, pe *Poncelet*, pe *Ostrogradski*, pe *Babbage*, pe *Cebîşev*, pe *Poinsot*, pe *Möbius*, pe *Chasles*, pe *Coriolis*, pe *Binet*, pe *Puiseaux*, pe *Bertrand*, pe *Helmholtz*, pe *Sophie Germain*, pe *Navier*, pe *Lamé*, pe *Saint Venant*, pe *Maxwell*.

Cea de-a doua jumătate a secolului trecut şi primele decenii ale secolului nostru au fost ilustrate în domeniul matematicilor aplicate de savanţi ca: *Sofia Kovalevska, Rouché, Kronecker, Clifford, Laguerre, Kirchhoff, Gibbs, Sylvester, Bertrand, de Morgan, Cantor, Jordan, Lipschitz, Schwartz, Picard, Hilbert, Borel, Lebesgue, Lalescu, Ţiţeica, Pompeiu, Vâlcovici, Appell, Lie, Klein, Darboux, Poincaré, Hadamard, Liapunov, Pointevé, Picone, Levi-Civita, Tricomi, Riesz, Volterra, Goursat, Neumann, Vessiot, Elie Cartan, Weyl, Sudan, Mushalişvili, Moisil, Tiberiu Popoviciu, Obreşkof, Kolmogorov, von Neumann, Onicescu, Banach, Hincin, von Mises, Mihoc, Markov, Krilov, Bogoliubov, Timoşenko, Jukovski, Steklov, Villat, Orean, Spiru Haret, Nicolae Gogu, Nicolae Coculescu, Schrödinger, Heisenberg, Fermi, Dirac, Louis de Broglie, Ştefan Procopiu, Şerban Ţiţeica, Alexandru Proca, Fréchet, Runge, Gnedenko, Kantorovici, Norbert Wiener, Gavrilov, Claude Shannon, Tarski.*

## § 5. Îndemnuri şi convingeri constructive pentru tineret.

Sîntem convinşi că evocarea acestor nume celebre şi a tradiţiei pe care cultivarea matematicilor aplicate o are în ţara noastră, va stimula îndemnul ca atît elevii şi studenţii cît şi profesorii lor, ca şi alţi specialişti ingineri, fizicieni, economişti, biologi să-şi aducă o contribuţie valoroasă la promovarea în Gazeta Matematică a articolelor, notelor şi problemelor de matematici aplicate. Prin aceasta am dovedit încă o dată că şcoala matematică românească se orientează totdeauna spre obiectivele de actualitate şi de importanţă majoră, tendinţa actuală şi perspectivele viitorului apropiat fiind spre cercetarea cu mijloacele prodigioase ale cuceririlor acestui secol, a faptului concret, prin modelări matematice inspirate din analiza interdisciplinară a fenomenelor din natură, viaţă şi societate.

# FORMULE DE INTEGRARE NUMERICĂ

de prof. univ. dr. **Valter Olariu**, Bucureşti

Metoda clasică pentru calculul integralei *Riemann* este dată de formula *Leibniz-Newton*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

în care $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă (pe $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$) iar $F\colon [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcţiei $f$ ($F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$). Această metodă este practic inaplicabilă cel puţin în următoarele cazuri:

i) Dacă $F$ are o formă analitică complicată sau dacă $F$ nu poate fi exprimată cu ajutorul funcţiilor elementare uzuale.

ii) Dacă funcţia $f$ nu este cunoscută decît prin valorile ei în nodurile $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset [a, b]$, $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$ (aşa cum se întîmplă în unele cazuri practice, cînd se ştie că $f$ este o funcţie integrabilă *Riemann* pe intervalul $[a, b]$, valorile ei putîndu-se obţine pe cale experimentală doar în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din $[a, b]$).

În aceste situaţii, sînt suficiente valori aproximative pentru integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ iar în acest cadru cea mai simplă metodă este bazată pe utilizarea unor formule de integrare numerică.



Scanned with OKEN Scanner

Aceste formule pot fi obținute pe diverse căi, și au forma generală

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),\ n \in \mathbf{N}^*$$

unde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset [\alpha, \beta]$, $\alpha \leqslant a < b \leqslant \beta$, $[\alpha, \beta]$ fiind intervalul de definiție al funcției $f$, iar $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbf{R}$ sînt coeficienții formulei de integrare (sau cuadratură) numerică (1).

Notînd

$$(2)\qquad E[f] = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$

rezultă egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f]$$

și deci $E[f]$ va fi eroarea care apare în formula de aproximare (1).

Există căi diverse pentru alegerea nodurilor $\{x_1, \ldots, x_n\}$ și a coeficienților $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ din formula de cuadratură numerică (1).

În cazul i) alegerea nodurilor este la dispoziția noastră (de remarcat că nu este obligatoriu ca aceste noduri să facă parte din intervalul de integrare $[a, b]$, ele putînd fi alese arbitrar în mulțimea de definiție a funcției $f$); în cazul ii) sîntem obligați ca nodurile formulei (1) să facă parte din mulțimea punctelor în care s-au putut defini valorile lui $f$.

Dacă nodurile $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \geqslant 1$, sînt alese, coeficienții $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se determină astfel încît eroarea $E[f]$ să fie „cît mai mică".

Vom determina coeficienții în cauză astfel încît formula de aproximare (1) să devină exactă pentru anumite funcții polinomiale (fie algebrice, dacă $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p$, fie trigonometrice, $f(x) = \alpha_0 + (\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x) + \ldots + (\alpha_p \cos(px) + \beta_p \sin(px))$. Se spune că formula de cuadratură numerică (1) are gradul de exactitate (pe scurt, gradul) $p \in \mathbf{N}$ dacă

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n)$$

pentru orice funcție polinom algebric de grad $\leqslant p$ și, dacă pentru cel puțin o funcție polinomială algebrică de grad $p+1$ nu poate avea loc egalitatea (2).

Teorema 1. *Pentru orice $n$ noduri distincte $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se pot determina coeficienții $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ astfel încît gradul de exactitate al formulei* (1) *să fie cel puțin egal cu $n-1$.*

Într-adevăr, scriind $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$ cu $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \mathbf{R}$, din (2), deoarece $\int_a^b x^k\,dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$, $k \in \mathbf{N}^*$, se deduce egalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(\alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 x_k^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_k^{n-1}) =$$

$$= \alpha_0(b-a) + \frac{\alpha_1}{2}(b^2 - a^2) + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{n}(b^n - a^n).$$

Cum $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sînt numere reale oarecare, luînd succesiv $\{\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0\}$, $\{\alpha_1 = 1, \alpha_0 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0\}$, $\ldots$, $\{\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-2} = 0, \alpha_{n-1} =$



Scanned with OKEN Scanner

$= 1\}$, se deduce sistemul liniar

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_n = b - a \\ x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = \dfrac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ x_1^2 A_1 + x_2^2 A_2 + \ldots + x_n^2 A_n = \dfrac{1}{3}(b^3 - a^3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{n-1} A_1 + x_2^{n-1} A_2 + \ldots + x_n^{n-1} A_n = \dfrac{1}{n}(b^n - a^n) \end{cases}$$

format din $n$ ecuații în necunoscutele $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$. Deoarece determinantul *Vandermonde*

$$(4)\qquad D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{n} \left( \prod_{j=1}^{k-1} (x_k - x_j) \right)$$

este nenul (nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind presupuse distincte) sistemul (3) admite o singură soluție.

**Exemple:** 1. Dacă $a = -1$, $b = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, atunci

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} f(-1) + 0 \cdot f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(f(-1) + 3f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

formula de aproximare în cauză având gradul $\geqslant 2$ (după cum se verifică imediat, rezolvând sistemul (3) pentru $a = -1$, $b = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$).

Deoarece $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$, iar $\frac{1}{2}\left(f(-1) + 3f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{4}{9}$, formula nu este exactă pentru nici o funcție polinomială de gradul 3, deci în acest caz avem $p = 2$.

2. Dacă $a = -1$, $b = 1$, $x_1 = -x_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, avem

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$$



Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

iar $p \geqslant 2$. Pentru $f(x) = x^2$, deoarece $5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0$, se deduce

$p \geqslant 3$, iar pentru $f(x) = x^4$, $5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 3f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 9$, iar $\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$,

adică $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \neq \frac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$.

În concluzie, formula de cuadratură numerică dedusă nu este exactă pentru funcțiile polinomiale de gradul 4, deci $p = 3$.

3. Dacă $a = 0$, $b = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, unde $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\{-2, -1\} \subset A$, $[0,1] \subset A$, atunci

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{5}{12}f(-2) - \frac{4}{3}f(-1) + \frac{23}{12}f(0) = \frac{1}{12}(5f(-2) - 4f(-1) + 23f(0))$$

cu $p \geqslant 2$. Pentru $f(x) = x^3$, se deduce $\int_0^1 f(x)\,dx \neq \frac{1}{12}(5f(-2) - 4f(-1) + 23f(0))$,

adică $p = 2$.

În particular, dacă în formula de aproximare (1) se presupune că nodurile sînt echidistante, adică

$$x_1 = a,\ x_2 = a + h,\ x_3 = a + 2h, \ldots, x_n = a + (n-1)h = b,\ n = 2, 3, \ldots,$$

deci $h = \frac{b-a}{n-1}$ se obține formula de cuadratură *Newton-Cotes* cu $n$ puncte ($n \geqslant 2$) pentru intervalul $[a, b] \subset \mathbf{R}$ (*Roger Cotes*, matematician și astronom englez, 1683–1717).

Așadar, în acest caz avem formula de integrare numerică

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(a + (k-1)h) \tag{5}$$

în care $p \geqslant n - 1$ iar coeficienții $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se obțin din sistemul (3).

Calculînd coeficienții formulei *Newton-Cotes* (5) pentru $n = 2, 3, \ldots, 9$ și intervalul $[-1, 1]$ se pot deduce coeficienții următori:

$n = 2$: $A_1 = 1$, $A_2 = 1$;

$n = 3$: $A_1 = \frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{4}{3}$, $A_3 = \frac{1}{3}$;

$n = 4$: $A_1 = \frac{1}{4}$, $A_2 = \frac{3}{4}$, $A_3 = \frac{3}{4}$, $A_4 = \frac{1}{4}$;

$n = 5$: $A_1 = \frac{7}{45}$, $A_2 = \frac{32}{45}$, $A_3 = \frac{12}{45}$, $A_4 = \frac{32}{45}$, $A_5 = \frac{7}{45}$;

$n = 6$: $A_1 = \frac{19}{144}$, $A_2 = \frac{75}{144}$, $A_3 = \frac{50}{144}$, $A_4 = \frac{50}{144}$, $A_5 = \frac{75}{144}$, $A_6 = \frac{19}{144}$;

$$n=7:\ A_1=\frac{41}{420},\ A_2=\frac{216}{420},\ A_3=\frac{27}{420},\ A_4=\frac{272}{420},\ A_5=\frac{27}{420},\ A_6=\frac{216}{420},\ A_7=\frac{41}{420};$$

$$n=8:\ A_1=\frac{751}{8640},\ A_2=\frac{3577}{8640},\ A_3=\frac{1323}{8640},\ A_4=\frac{2989}{8640},\ A_5=\frac{1323}{8640},\ A_6=\frac{3577}{8640},$$

$$A_7=\frac{751}{8640};$$

$$n=9:\ A_1=\frac{989}{14175},\ A_2=\frac{5888}{14175},\ A_3=-\frac{928}{14175},\ A_4=\frac{10496}{14175},\ A_5=-\frac{4540}{14175},$$

$$A_6=\frac{10496}{14175},\ A_7=-\frac{928}{14175},\ A_8=\frac{5888}{14175},\ A_9=\frac{989}{14175}.$$

Pentru $n=2$, formula *Newton-Cotes* (5) se scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{h}{2}\,(f(a)+f(b)),\quad h=\frac{b-a}{2} \tag{6}$$

și se mai numește formula trapezelor (deoarece numărul real $\frac{h}{2}(f(a)+f(b))$ poate fi interpretat ca fiind aria unui trapez având lungimile bazelor $f(a)$ și $f(b)$ și înălțimea $h$, în ipoteza $f(x)>0,\ x\in[a,b]$).

Pentru $n=3$, formula *Newton-Cotes* corespunzătoare se scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right),\quad h=\frac{b-a}{2} \tag{7}$$

și mai poartă numele de formula lui *Simpson* (*Thomas Simpson*, matematician englez, 1710—1761).

Pentru $n=4$, formula (5) se transcrie

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{3h}{8}\,(f(a)+3f(a+h)+3f(a+2h)+f(b)),\quad h=\frac{b-a}{3} \tag{8}$$

și se numește formula 3/8 (citit trei pe opt).

În ceea ce privește gradul de exactitate, rezultă imediat $p=1$ în cazul formulei trapezelor (deoarece pentru $f(x)=x^2$ membrul stîng este egal cu $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$, iar membrul drept devine $\frac{1}{2}(b^2-a^2+a^2b-ab^2)$, cele două numere neputînd fi egale decît dacă $a=b$), $p=3$ în cazul formulei lui *Simpson* (deoarece pentru $f(x)=x^3$, numerele reale definite de cei doi membri ai formulei de aproximare (7) coincid) și $p=3$ în cazul formulei 3/8 (dacă $f(x)=x^4$ în (8), cei doi membri sînt diferiți).

De aici se deduce utilitatea practică a formulei lui *Simpson*: gradul ei de exactitate coincide cu al formulei *Newton-Cotes* pentru $n=4$, deși ea a fost dedusă pentru $n=3$.

Se poate arăta că pentru orice formulă de tip *Newton-Cotes* definită printr-un număr impar de noduri (deci inițial $p\geq n-1$) avem $p=n$, iar în cazul unui număr par de noduri, $p=n-1$ (p fiind gradul de exactitate al formulei de cuadratură).

În practică formulele (6) – (7) – (8) se aplică luînd în considerație diviziuni (partiții) ale intervalului $[a,b]$ și scriind aceste formule pentru subintervalele diviziunii în cauză.



Scanned with OKEN Scanner

Așadar, dacă $[a, b] = \bigcup_{j=1}^{N} [x_{j-1}, x_j]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, formulele de aproximare (6)—(8) devin:

$$(6') \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} h_j (f(x_{j-1}) + f(x_j)),\ h_j = x_j - x_{j-1}$$

$$(7') \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{N} h_j \left( f(x_{j-1}) + 4f\left( \frac{x_{j-1} + x_j}{2} \right) + f(x_j) \right),\ h_j = \frac{1}{2}(x_j - x_{j-1})$$

$$(8') \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3}{8} \sum_{j=1}^{N} h_j (f(x_{j-1}) + 3f(x_{j-1} + h_j) + 3f(x_{j-1} + 2h_j) + f(x_j)),\ h_j = \frac{1}{3}(x_j - x_{j-1})$$

Cel mai comod caz se va obține dacă $h_j = h$, $j = 1, 2, \ldots, N$ cînd formula trapezelor (6') se transcrie

$$(6'') \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} (f(a) + 2f(a + h) + 2f(a + 2h) + \ldots + 2f(b - h) + f(b)),\ h = \frac{b - a}{N},$$

sau dacă se divide intervalul $[a, b]$ în $2N$ subintervale de lungime egală prin punctele $x_k = a + \frac{b - a}{2N} k$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$, cînd formula lui *Simpson* (7') se transcrie sub forma

$$(7'') \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{6N} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots$$

$$\ldots + 2f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})).$$

În cazul formulei 3/8 (8'), se consideră diviziuni echidistante ale intervalului $[a, b]$ prin punctele $x_k = a + \frac{b - a}{3N} k$, $k = 0, 1, \ldots, 3N$.

O observație importantă este aceea că sumele din formulele de aproximare *Newton-Cotes* sînt de fapt cazuri particulare de sume integrale.

De exemplu, în cazul formulei trapezelor (6) avem

$$\frac{h}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j)) = \frac{1}{2} (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1}) + \frac{1}{2} (x_j - x_{j-1}) f(x_j) =$$

$$= (x'_j - x_{j-1}) f(x_{j-1}) + (x_j - x'_j) f(x_j), \quad \text{cu} \quad x'_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1}),$$

rezultînd că membrul drept al relației (6') este sumă integrală pentru funcția $f$ pe intervalul $[a, b]$, corespunzînd diviziunii $x_0 = a$, $x'_1 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$, $x_1, \ldots, x_{j-1}$, $x'_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$, $x_j, \ldots, x_{n-1}$, $x'_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n)$, $x_n = b$ și alegerii valorilor $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ corespunzînd diviziunii considerate.

În cazul formulei lui *Simpson* (7), se observă imediat că în cazul diviziunii $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$, $x_1 = \frac{5a + b}{6}$, $x_2 = \frac{a + 5b}{6}$, cu $\xi_1 = a$, $\xi_2 = \frac{1}{2}(a + b)$, $\xi_3 = b$ (evident $x_1 < \frac{1}{2}(a + b) < x_2$), avem



Scanned with OKEN Scanner

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

cu $h = \frac{1}{2}(b-a)$.

(Amintim că prin sumă *Riemann* atașată funcției $f$ în intervalul $[a, b]$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, se înțelege suma $S(f; P, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, unde $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ și $\xi_j$ este ales arbitrar în intervalul $[x_{j-1}, x_j]$; dacă $f$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci $\lim_{|P|\to 0} S(f; P, \xi) = \int_a^b f(x)\,dx$, unde $|P| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$).

Analog se poate proceda și în cazul formulei *Newton-Cotes* generală.

Rezultă deci că pentru $N \to \infty$, formulele de aproximare (6'') și (7'') au proprietatea că membrul drept converge către valoarea din membrul stâng.

În legătură cu formula de cuadratură numerică (1), *Gauss* a pus, și totodată a rezolvat, următoarea problemă privind optimizarea acestei formule.

Teorema 2. *Dacă nodurile $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ din (1) coincid cu rădăcinile funcției polinomiale $((x-a)^n(x-b)^n)^{(n)}$ atunci formula de cuadratură numerică (1) în care coeficienții $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt obținuți din sistemul (3) are gradul de exactitate $2n-1$.*

Înainte de a justifica acest rezultat, vom demonstra următoarea lemă:

*Lemă.* Funcția $((x-a)^n(x-b)^n)^{(n)}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$ admite $n$ rădăcini reale și distincte în intervalul $(a, b)$.

Într-adevăr, deoarece $\int_a^b ((x-a)^n(x-b)^n)^{(n)}\,dx = ((x-a)^n(x-b)^n)^{(n-1)}\Big|_{x=a}^{x=b}$, iar $(x-a)^n(x-b)^n$ admite $x = a$, $x = b$ ca rădăcini multiple de ordin $n$, derivata de ordinul $n-1$ a acestei funcții va admite $x = a$ și $x = b$ ca zerouri simple (prin aplicarea repetată a teoremei lui *Rolle*).

Deci $((x-a)^n(x-b)^n)^{(n-1)} = 0$ dacă $x = a$ și $x = b$, adică

$$\int_a^b ((x-a)^n(x-b)^n)^n dx = 0. \tag{9}$$

Cum $(x-a)^n(x-b)^n$ este o funcție polinomială de gradul $2n$, derivata ei de ordinul $n$ va fi o funcție polinomială de gradul $n$, care, deoarece verifică (9), va trebui să-și modifice semnul în punctele $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset (a, b)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, adică are loc descompunerea în factori

$$p_n(x) = ((x-a)^n(x-b)^n)^{(n)} = (x-x_1)^{2k_1+1}(x-x_2)^{2k_2+1}\ldots(x-x_m)^{2k_m+1} \tag{10}$$

cu $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \subset \mathbb{N}$, $(2k_1+1) + (2k_2+1) + \ldots + (2k_m+1) = n$ (dacă o putere este pară, de exemplu, dacă avem $(x-x_1)^{2k_1}$ în loc de $(x-x_1)^{2k_1+1}$, în punctul $x_1$ funcția $p_n$ nu-și va schimba semnul). Dacă $m = n$, lema este justificată și de aceea, fie $m < n$ și să notăm $q_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$. Evident $p_n(x)q_m(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, deci $\int_a^b p_n(x)q_m(x)\,dx \neq 0$.

Or, integrînd prin părți, rezultă

$$\int_a^b q_m(x)((x-a)^n(x-b)^n)^{(n)}\,dx = q_m(x)((x-a)^n(x-b)^n)^{(n-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} -$$

$$- \int_a^b q_m'(x)((x-a)^n(x-b)^n)^{(n-1)}\,dx = \ldots = (-1)^n \int_a^b q_m^{(n)}(x)(x-a)^n(x-b)^n\,dx,$$



Scanned with OKEN Scanner

deoarece $((x-a)^n(x-b)^n)^{(k)}=0$ dacă $x=a$ şi $x=b$ pentru $k=0,1,\ldots,n-1$ (după cum s-a constatat anterior). Deoarece $n>m$ avem $q_m^{(n)}=0$, deci $\int_a^b q_m^{(n)}(x)(x-a)^n(x-b)^n\,dx=0$, adică $\int_a^b p_n(x)q_m(x)\,dx=0$.

S-a obţinut o contradicţie care arată că neapărat $m=n$; deci $p_n$ fiind o funcţie continuă pe $\mathbf{R}$, o schimbare de semn echivalează cu existenţa unei rădăcini pentru $p_n$.*)

*Demonstraţia teoremei 2.* Fie $f$ o funcţie polinomială de grad $2n-1$ şi să scriem identitatea împărţirii cu $p_n$ definit prin (10), adică

$$f=g_{n-1}p_n+r_{n-1} \tag{11}$$

cu $g_{n-1}$, $r_{n-1}$ funcţii polinomiale de grad $\leqslant n-1$. Deoarece

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g_{n-1}(x)p_n(x)\,dx+\int_a^b r_{n-1}(x)\,dx,$$

în baza calculelor din demonstraţia lemei, avem $\int_a^b g_{n-1}(x)p_n(x)\,dx=0$, rezultînd $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b r_{n-1}(x)\,dx$; cum gradul de exactitate al formulei (1) este $\leqslant n-1$, avem

$$\int_a^b r_{n-1}(x)\,dx=\sum_{k=1}^n A_k r_{n-1}(x_k)$$

deci

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n A_k r_{n-1}(x_k).$$

Or, din (11) se deduce $r_{n-1}(x_k)=f(x_k)-g_{n-1}(x_k)p_n(x_k)=f(x_k)$, $k=1,2,\ldots,n$ deoarece $\{x_1,\ldots,x_n\}\subset[a,b]$ au proprietatea că anulează funcţia $p_n$. În definitiv,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \tag{12}$$

deci gradul de exactitate al formulei (1) este $\geqslant 2n-1$.

Înlocuind în (12) $f$ prin $p_n^2$ (care este funcţie polinomială de gradul $2n$) avem $\int_a^b p_n^2(x)\,dx>0$ şi $\sum_{k=1}^n A_k p_n^2(x_k)=0$, deci egalitatea nu poate avea loc, ceea ce conduce la concluzia că (1) este o formulă de cuadratură numerică de gradul $2n-1$.

*) O altă demonstraţie a lemei este următoarea: se arată prin inducţie după $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ că funcţia $p_k(x)=((x-a)^n(x-b)^n)^{(k)}$ este polinomială de grad $2n-k$ având pe $a$ şi $b$ rădăcini multiple de ordin $n-k$ şi $k$ rădăcini simple în intervalul $(a,b)$. Pentru $k=n$ obţinem lema (N. R.)



Scanned with OKEN Scanner

Importanța teoremei 2 este evidentă: se pot obține cu $n$ valori ale lui $f$ (calculate însă în puncte prescrise ale intervalului $[a, b]$) aceleași rezultate ca prin utilizarea a $2n$ puncte luate arbitrar în $[a, b]$.

Funcția polinomială $p_n$ definită prin (10) se numește *polinomul Legendre de gradul n* relativ la intervalul $[a, b]$, iar formula de aproximare (1) cu nodurile definite de rădăcinile lui $p_n$ se numește *formulă de cuadratură numerică de tip Gauss-Legendre (Adrien-Marie Legendre,* matematician francez, creator al teoriei integralelor eliptice, 1752—1833).

Prezentăm mai jos valorile nodurilor $\{x_1, \ldots, x_n\}$ și ale coeficienților $\{A_1, \ldots, A_n\}$ în cazul formulei de cuadratură numerică *Gauss-Legendre* pentru $n = 2, 3, 4, 5$, dacă $a = -1$, $b = 1$ (de la intervalul canonic $[-1, 1]$ se poate trece la orice interval de lungime finită $[a, b]$ prin schimbarea variabilei $x \in [-1, 1]$ în variabila $t = \frac{1}{2}((b-a)x + a + b)$).

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad x_{n-k+1} = -x_k, \quad A_{n-k+1} = A_k$$

$n = 2$: $x_1 = 0{,}57735$; $x_2 = -x_1$; $A_1 = 0{,}1$; $A_2 = A_1$;

$n = 3$: $x_1 = 0{,}77459$; $x_2 = 0$; $x_3 = -x_1$; $A_1 = 0{,}55555$; $A_2 = 0{,}88889$; $A_3 = A_1$;

$n = 4$: $x_1 = 0{,}861146$; $x_2 = 0{,}33998$; $x_3 = -x_2$; $x_4 = -x_1$;
$A_1 = 0{,}34785$; $A_2 = 0{,}65214$; $A_3 = A_2$; $A_4 = A_1$;

$n = 5$: $x_1 = 0{,}90618$; $x_2 = 0{,}53847$; $x_3 = 0$; $x_4 = -x_2$; $x_5 = -x_1$;
$A_1 = 0{,}23693$; $A_2 = 0{,}47863$; $A_3 = 0{,}56889$; $A_4 = A_2$; $A_5 = A_1$.

## PROBLEME DATE LA TESTUL DIN 16 I 1983 ÎN TABĂRA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ DIN BAIA MARE

de lector dr. Mircea Becheanu și lector dr. Ioan Tomescu, București

**Enunțurile** problemelor sînt următoarele:

**1.** Să se arate că cea mai mică valoare pozitivă a funcției $f(x, y) = (x^2 + y^2)/y$ definită pentru perechile $(x, y)$ cu $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^*$ și $7x^2 + 3xy + 3y^2 = 1$, este $\frac{1}{2}$.

**2.** Se dau numerele reale, $x, y, z, t$ astfel încît

$$x + y + z + t = x^7 + y^7 + z^7 + t^7 = 0.$$

Să se arate că $x(x + y)(x + z)(x + t) = 0$.

**3.** Un număr par de persoane sînt așezate în jurul unei mese circulare. După o pauză, aceleași persoane se reașează la masă ocupînd poziții arbitrare. Să se arate că există cel puțin două persoane astfel încît numărul persoanelor așezate între ele a rămas neschimbat. Rămîne proprietatea adevărată pentru un număr impar de persoane?

**4.** Vom numi tetraedru dreptunghic un tetraedru în care toate fețele sînt triunghiuri dreptunghice.

a) Să se demonstreze că orice paralelipiped dreptunghic se poate partiționa în șase tetraedre dreptunghice.

b) Să se arate că un tetraedru cu vîrfurile $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ este dreptunghic dacă și numai dacă există patru numere reale distincte $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ astfel încît $A_jA_k = \sqrt{|c_j - c_k|}$ pentru orice $1 \leqslant j < k \leqslant 4$.

Prezentăm în continuare **soluțiile** acestor probleme.

**1.** Se observă că $f(x, y) \geqslant 0 \Leftrightarrow y > 0$. Deci putem presupune $y > 0$. De asemenea se observă că $f(1/5, 2/5) = 1/2$ și că perechea $(1/5, 2/5)$ satisface ecuația

$$7x^2 + 3xy + 3y^2 = 1, \tag{1}$$

Deci este suficient să arătăm că pentru perechile $(x, y)$ date avem $f(x, y) \geqslant 1/2$.

Ținînd seama de (1), condiția $f(x, y) \geqslant 1/2$ este echivalentă cu

$$2(1 - 2x)(1 + 2x) \geqslant 3y(1 + 2x), \tag{2}$$

Din (1) și presupunerea $y > 0$ rezultă că $y = (-3x + \sqrt{12 - 75x^2})/6$, (3).
Din condiția $12 - 75x^2 \geqslant 0$ rezultă că $x \in [-2/5, 2/5]$. Deoarece $-1/2 < -2/5$ și $x > -2/5$ rezultă $1 + 2x > 0$, deci (2) este echivalentă cu $2(1 - 2x) \geqslant 3y$, (2').
Ținînd seama de (3) se deduce că (2') este echivalentă cu $(5x - 1)^2 \geqslant 0$.

**2.** Notînd $b = \Sigma xy$, $c = \Sigma xyz$ și $d = xyzt$, rezultă că $x, y, z, t$ sînt rădăcinile ecuației $u^4 + bu^3 - cu + d = 0$. Notînd $S_k = \Sigma x^k$ se deduce $S_1 = 0$, $S_2 = -2b$, $S_3 = 3c$, $S_4 =$

$= 2b^2 - 4d$ și din relația de recurență $S_{n+3} = -bS_{n+2} + cS_{n+1} - dS_n$ se mai obține $S_4 = -5bc$, $S_5 = 7c(b^2 - d)$. Deci $c = 0$ sau $b^2 = d$.

Dacă $c = 0$, atunci $x, y, z, t$ sînt rădăcinile ecuației bipătrate $u^4 + bu^2 + d = 0$, care sînt de forma $\pm u_1, \pm u_2$, și enunțul se verifică.

Dacă $b^2 = d$ rezultă $S_4 = -2b^2$ deci $b = 0$ și $d = 0$. Obținem că numerele reale $x, y, z, t$ sînt rădăcinile unui polinom de forma $u^4 - cu = u(u^3 - c)$. Rezultă $c = 0$ și deci $x = y = z = t = 0$.

5. Presupunem că persoanele ocupă virfurile unui poligon regulat $A_0A_1 \dots A_{2n-1}$ cu $2n$ laturi înscris într-un cerc de centru $O$, virfurile fiind notate astfel încît să parcurgem cercul în sens trigonometric. Alegînd axa $Ox$ astfel încît să treacă prin virful $A_0$, putem asocia fiecărui virf $A_k$ numărul complex $z_k$ de argument $kx = k\pi/n$, $0 \leq k < 2n$ sau clasa de resturi $\hat{k}$ (mod $2n$), această asociere fiind o bijecție. Considerăm că rearanjarea virfurilor poligonului se face prin rotirea fiecărui virf $A_k$ cu un unghi $\varphi_k$ de măsură $l_k\pi/n (l_k \in N, l_k\pi/n < 2\pi)$, în sens trigonometric. Dacă două unghiuri $\varphi_i$, $\varphi_j$ sînt egale, concluzia problemei rezultă imediat. În caz contrar, rezultă că unghiurile $\varphi_k$ parcurg toată mulțimea $\{0, \pi/n, 2\pi/n, \dots, (2n-1)\pi/n\}$.

Deoarece după rotație se obțin virfurile aceluiași poligon regulat, rezultă că suma unghiurilor de rotație este un număr real de forma $2m\pi$, $m \in N$. Deci are loc egalitatea:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \varphi_k = \sum_{j=0}^{2n-1} j\pi/n = (2n-1)\pi = 2m\pi,$$

ceea ce conduce la o contradicție.

La această concluzie se mai poate ajunge astfel: după rotație, fiecare virf $A_k$ ocupă poziția clasei de resturi $\hat{k} + \hat{l}_k$. Deoarece aceste clase de resturi sînt exact elementele mulțimii $Z_{2n}$, rezultă că în $Z_{2n}$ avem egalitatea:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (\hat{k} + \hat{l}_k) = \sum_{k=0}^{2n-1} \hat{k}.$$

De aici rezultă că:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} l_j = 0 + 1 + 2 + \dots + (2n-1) \equiv 0 \pmod{2n},$$

deci $n(2n-1) \equiv 0 \pmod{2n}$. Dar $2n \mid n(2n-1)$ și $(2n, 2n-1) = 1$ implică $2n \mid n$, ceea ce este contradictoriu.

În cazul $n$ impar proprietatea nu rămîne adevărată. Considerînd cazul a 5 persoane notate cu numerele 1, 2, 3, 4, 5 și permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ se observă că pentru orice $(i, j)$ cu $1 \leq i < j \leq 5$ avem $j - i \neq |\sigma(j) - \sigma(i)|$. În cazul unui număr impar oarecare $2n+1$, permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n+1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$ îndeplinește de asemenea condiția $j - i \neq |\sigma(j) - \sigma(i)|$, $1 \leq i < j \leq 2n+1$.

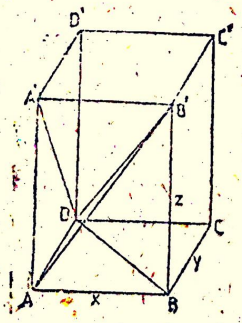


Fig. 1

4. a) Prisma $ABDA'B'D'$ se descompune în trei tetraedre dreptunghice și anume: $ABDB'$, $AA'DB'$ și $A'B'D'D$ (Fig. 1). Analog se descompune prisma $BCDB'C'D'$.

b) Trebuie să stabilim forma tetraedrelor dreptunghice $ABCD$ și anume vom demonstra că unghiurile drepte au două cîte două un virf comun și o muchie comună, iar muchiile comune sînt muchii opuse ale tetraedrului. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $m(\widehat{BAC}) = 90$, deci $a^2 = b^2 + c^2$ și lungimile muchiilor se notează astfel: $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$ și $BC = a$. Vom considera mai multe cazuri, după cum unghiurile drepte apar pe fețele tetraedrului:

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = 90$, deci $a^2 = b^2 + c^2$, $e^2 = b^2 + d^2$ și $f^2 = c^2 + d^2$. Dacă $m(\widehat{BDC}) = 90$ avem $a^2 = e^2 + f^2$, de unde deducem $d = 0$, contradicție. Dacă $m(\widehat{DCB}) = 90$ deducem $e^2 = a^2 + f^2$, de unde $a^2 = e^2 - f^2 = b^2 - c^2 = b^2 + e^2$, deci $c = 0$,



Scanned with OKEN Scanner

contradicție. Un caz analog se obține atunci cînd $m(\widehat{DBC}) = 90$. Dacă cele două unghiuri drepte au vîrful comun în $B$, avem cazurile: $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DAC}) = 90$ și obținem pentru tetraedru forma specială de care am vorbit. Dacă $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ACD}) = 90$, deducem că $BD$ este perpendiculară pe planul $(ABC)$, $DC$ este perpendiculară pe $AC$ și deci din teorema celor trei perpendiculare se obține că $BC$ este perpendiculară pe $AC$, contradicție, deoarece triunghiul $ABC$ nu poate conține două unghiuri drepte. Deci putem deduce imposibilitatea unor aranjări ale unghiurilor drepte pe fețele tetraedrului $ABCD$ fie prin concluzia că o muchie ar avea o lungime nulă (vom spune că acest raționament este de tipul a), fie prin concluzia că o față ar conține două unghiuri drepte (vom spune că acest raționament este de tipul b).

Următoarele configurații nu pot apare, demonstrația făcîndu-se printr-un raționament de tipul indicat:

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ADC}) = 90$ (tipul a), cu o situație analoagă cînd cele două unghiuri drepte diferite de $A$ au comun vîrful $C$ și muchia $CD$; să mai considerăm cazurile cînd două unghiuri drepte au comun vîrful $D$ și muchia comună $AD$ sau $BD$ sau $DC$:

$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{DBC}) = 90$ (tipul a). Fie acum $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BDC}) = 90$ (cazul $m(\widehat{ADB}) = 90$ și $m(\widehat{BDC}) = 90$ se tratează analog). Avem două subcazuri: $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BDC}) = 90$, deci tetraedrul are forma specială indicată: $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BDC}) = 90$ (tipul b). Mai rămîne să considerăm cazurile cînd unghiurile drepte diferite de $A$ nu au vîrfuri comune: $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ACD}) = 90$ (tipul a); $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{ACD}) = 90$ (tipul b); $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{DBC}) = 90$ (tipul a); $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD}) = 90$ (tipul a); $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ACD}) = 90$ (tipul a); $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BCD}) = 90$ (tipul a). Cazurile: $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{DBC}) = 90$; $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BCD}) = 90$; $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BDC}) = 90$ și $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BCD}) = 90$ sînt analoage cu trei cazuri tratate anterior.

A mai rămas un singur caz și anume: $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{ACD}) = 90$. Se obțin egalitățile: $a^2 = b^2 + c^2$, $d^2 = b^2 + e^2$, $d^2 = c^2 + f^2$, $a^2 = e^2 + f^2$, deci $c^2 + f^2 = b^2 + c^2$, $b^2 + e^2 = c^2 + f^2$, deci $e^2 - f^2 = c^2 - b^2$, de unde $e = c$, $b = f$, $a = d$. În acest caz tetraedrul este echifacial și toate fețele sînt triunghiuri dreptunghice congruente. Vom demonstra că în acest caz tetraedrul echifacial $ABCD$ este degenerat, el reducîndu-se la un dreptunghi $ABDC$ cu lungimile laturilor $b$ și $c$ și lungimea diagonalei $a$.

Într-adevăr, notînd cu $M$ și $N$ mijloacele muchiilor $AD$ și $BC$, deducem că $AM = BM = CM = DM = a/2$ și $AN = BN = CN = DN = a/2$. Cum pentru un tetraedru, centrul sferei circumscrise este unic determinat, rezultă că $M = N$ și deci $A$, $B$, $C$ și $D$ sînt coplanare, fiind vîrfurile unui dreptunghi.

Acum suficiența condiției de la b) se demonstrează imediat, deoarece din reciproca teoremei lui *Pitagora* se deduce că toate fețele tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ sînt triunghiuri dreptunghice (presupunînd de exemplu că $c_1 > c_2 > c_3 > c_4$). Pentru a demonstra necesitatea, folosim caracterizarea tetraedrelor dreptunghice stabilită anterior. Astfel, deoarece $A_1A_2A_3A_4$ are forma specială indicată, notînd $AB = x$, $AD = y$, $AA' = z$ (fig. 1), obținem lungimile celor șase muchii: $x, y, z$, $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\sqrt{x^2 + z^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Alegem $a > b > c > d > 0$ astfel încît să avem $y = \sqrt{c - d}$, $x = \sqrt{b - c}$, $z = \sqrt{a - b}$ (deci $c = \lambda > y^2$, $d = \lambda - y^2$, $b = x^2 + \lambda$, $a = x^2 + z^2 + \lambda$). Rezultă $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{b - d}$, $\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{a - c}$, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a - d}$.



Scanned with OKEN Scanner

# ASUPRA UNOR SUME CU COMBINĂRI

de asistent univ. Dorin Andrica, Cluj-Napoca

În lucrarea [1] *Dumitru Acu* prezintă o metodă de calcul pentru următoarele două sume:

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} k^p C_n^k, \quad s_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^p C_n^k, \tag{1}$$

Metoda dată în [1] utilizează sumele simetrice $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ atașate numerelor $1, 2, \ldots, p-1$, ceea ce complică calculul sumelor (1) pentru valori mari ale lui $p$.

În această notă dorim să dăm o formulă de recurență pentru calculul sumelor $S_{n,p}$ și $s_{n,p}$ și să calculăm efectiv aceste sume pentru cîteva valori ale lui $p$. Ca o aplicație vom regăsi prin metoda noastră un rezultat remarcabil datorat lui *Euler* (vezi [2] pag. 17).

**Teoremă.** *Sumele $S_{n,p}$ și $s_{n,p}$ satisfac relația de recurență:*

$$S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p}), \; p \geqslant 0 \tag{2}$$

$$s_{n,p+1} = n(s_{n,p} - s_{n-1,p}), \; p \geqslant 0 \tag{3}$$

*Demonstrație.* Avem succesiv:

$$n(S_{n,p} - S_{n-1,p}) = n\left(\sum_{k=0}^{n} k^p C_n^k - \sum_{k=0}^{n-1} k^p C_n^k\right) =$$

$$= n\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^p (C_n^k - C_{n-1}^k) + n^p C_n^n\right] = n\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^p C_{n-1}^{k-1} + n^p C_n^n\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^{p+1} C_n^k + n^{p+1} C_n^n = \sum_{k=0}^{n} k^{p+1} C_n^k = S_{n,p+1},$$

unde am folosit binecunoscutele relații $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ și $nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k$.

În mod analog se demonstrează și relația (3).

Din formulele (2) și (3) este clar cum se pot calcula $S_{n,p}$ și $s_{n,p}$, cunoscînd valorile inițiale. $S_{n,0} = 2^n$, $s_{n,0} = 0$, $(\forall)\; n \geqslant 1$. Se obțin ușor următoarele valori: $S_{n,0} = 2^n$; $S_{n,1} = n2^{n-1}$; $S_{n,2} = n(n+1)\,2^{n-2}$; $S_{n,3} = n^2(n+3)\,2^{n-3}$; $S_{n,4} = n(n+1)\,(n^2 + 3n - 2)2^{n-4}$; $S_{n,5} = n^2(n^3 + 8n^2 + 7n - 8)\,2^{n-5}$.

Prin inducție după $p$ se arată ușor că $s_{n,p} = 0$ pentru $p \leqslant n-1$. Cazul $p = n$, adică calculul sumei $s_{n,n}$ este deosebit de interesant. În acest caz avem din (3), ținînd seama că $s_{n,n-1} = 0$, următoarea relație

$$s_{n,n} = -n \cdot s_{n-1,n-1}$$

de unde se obține imediat:

$$s_{n,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^n C_n^k = (-1)^n n!, \tag{4}$$

identitate atribuită lui *Euler* ([2], pag. 17).

Tot din (3) mai putem calcula suma $s_{n,n+1}$. Avem relația de recurență

$$s_{n,n+1} = n(s_{n,n} - s_{n-1,n})$$

de unde ținînd seama de (4) găsim

$$s_{n,n+1} = n((-1)^n n! - s_{n-1,n}).$$

Un calcul simplu conduce la:

$$s_{n,n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^{n+1} C_n^k = (-1)^n n! \frac{n(n+1)}{2}.$$

De remarcat faptul că are loc identitatea mai generală:

$$s_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^p C_n^k = n!\,S(p,n), \tag{6}$$

unde $S(p,n)$ reprezintă numerele lui *Stirling* de speța a II-a. Demonstrația relației (6) poate fi găsită în [3] (pag. 14) sau [2], (pag. 21).

## Bibliografie

[1]. *Acu, D.*, Calculul unor sume cu combinări, G. M. 6/1987, pag. 214–216.

[2]. *Tomescu I.*, Probleme de combinatorică și teoria grafurilor, Ed. did. și ped., București, 1981.

[3]. *Lovász, L.*, Combinatorial Problems and Exercises, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.



Scanned with OKEN Scanner

# ASUPRA UNOR PROBLEME PRIVIND APLICAȚII ALE TRINOMULUI DE GRADUL II

de Ileana-Simona Pascu, profesoară, București

Scopul acestei note este acela de a prezenta unele metode de rezolvare ale unor tipuri de probleme de clasa a IX-a privind aplicații ale trinomului de gradul al doilea. Una dintre aceste metode (cea de-a treia) își găsește fundamentarea teoretică în clasa a XI-a și permite obținerea unei soluții foarte simple. Se constată cu elevul de clasa a XI-a rareori se întoarce să folosească metodele puternice ale analizei matematice la probleme de clasele mai mici și prezenta notă este o pledoarie pentru schimbarea acestei stări de lucruri.

Pentru $f: A \to B$ și pentru $C \subset A$ mulțimile $\{f(x) \in B \mid x \in C\}$ și $\{y \in B \mid$ ecuația $f(x) = y$ are cel puțin o soluție $x \in C\}$ sînt evident egale și se notează cu $f(C)$ (imaginea lui $C$ prin $f$). Pentru $C = A$, $f(A)$ se notează cu Im $f$.

Folosind pe rînd cîte una din definițiile lui Im $f$ vom prezenta trei soluții ale problemelor 30 și 31 din [1] pag. 28.

Enunțurile acestor probleme sînt:

**Problema 30.** *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1}$ $(a \in \mathbf{R})$. *Să se determine valorile lui* $a$ *astfel încît* Im $f \subset [-3, 2]$.

**Problema 31.** *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$. *Să se determine* $m$ *și* $n$ *astfel încît* Im $f = [-3,5]$.

Primele două soluții se bazează pe următorul plan de rezolvare:

1. Se determină Im $f$. Se va obține Im $f = [h(a), g(a)]$ (respectiv $[h(m, n), g(m, n)]$) unde $h$ și $g$ sînt expresii în funcție de parametrii dați. De remarcat că pentru a obține acest tip de scriere pentru Im $f$ trebuie făcută o discuție cu privire la poziția relativă a lui $h(a)$ și $g(a)$ (respectiv $h(m, n)$ și $g(m, n)$).

2. Se determină parametrii din condițiile $h(a) \geqslant -3$, $g(a) \leqslant 2$ (pentru problema 30) (respectiv $h(m, n) = -3$ și $g(m, n) = 5$ pentru problema 31).

Existența a două soluții pentru aceste probleme provine din modul cum se calculează Im $f$.

*Soluția 1* (la nivelul clasei a IX-a. Considerînd Im $f = \{y \in B \mid$ ecuația $f(x) = y$ are cel puțin o soluție $x \in \mathbf{R}\}$, se analizează ecuația $f(x) = y$, se aduce la o ecuație de gradul al II-lea și din condiția $\Delta_x \geqslant 0$ se obține Im $f$. Această soluție este prezentată de autori la indicațiile de rezolvare a problemelor.

*Soluția a 2-a* (la nivelul clasei a XI-a). Se calculează Im $f$ cu ajutorul derivatei și limitelor la capetele domeniului de definiție. De remarcat că această soluție comportă calcule destul de laborioase.

*Soluția a 3-a.* Cea de-a treia soluție se bazează pe egalitatea Im $f = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

Pentru problema 30 se poate da o soluție la nivelul clasei a IX-a:

$$\text{Im } f \subseteq [-3,2] \Leftrightarrow -3 \leqslant \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \leqslant 2, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Se obține $4x^2 + (a + 3)x + 4 \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ și $x^2 + (2 - a)x + 1 \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Aceste inegalități au loc pentru orice $x$ real dacă și numai dacă discriminanții membrilor stîngi sînt negativi. Se obține $(a + 3)^2 - 64 \leqslant 0$ și $(2-a)^2 - 4 \leqslant 0$, de unde $a \in [-11; 5] \cap [-4; 0] = [-4,0]$.

Se observă că prin această soluție se evită discuțiile cu privire la pozițiile relative ale lui $h(a)$ și $g(a)$ necesare la precedentele soluții.

Pentru problema 31 fundamentarea teoretică a planului de rezolvare este la nivelul clasei a XI-a.

Ca mai sus se pune întîi condiția Im $f \subseteq [-3; 5]$ și deci $-3 \leqslant f(x) \leqslant 5$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Se obține $\Delta_1 \leqslant 0$, $\Delta_2 \leqslant 0$. Dat fiind că $f$ este o funcție continuă, Im $f$ este un interval. Este suficient atunci să punem condiția $\{-3; 5\} \subseteq$ Im $f$. Ori aceste condiții antrenează $\Delta_1 \geqslant 0$ și $\Delta_2 \geqslant 0$, deoarece înseamnă că ecuațiile $f(x) = -3$ și $f(x) = 5$ au rădăcini reale. Se obțin



Scanned with OKEN Scanner

atunci valorile parametrilor $m$ și $n$ rezolvînd sistemul $\Delta_1 = 0$ ; $\Delta_2 = 0$. În mod concret se obține sistemul:

$$\begin{cases} m^2 - 24\,(3+n) = 0 \\ m^6 - 8\,(5-n) = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile $(n_1 = -1,\ m_1 = -4\sqrt{3})$ și $(n_2 = -1,\ m_2 = 4\sqrt{3})$.

## Bibliografie

[1] G. *Năstăsescu, C. Niță, M. Brandiburu, D. Joița*, Exerciții și probleme de algebră, cls. IX—XII, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.

# O NOUĂ METODĂ PENTRU CALCULUL SUMEI PUTERILOR ASEMENEA ALE PRIMELOR n NUMERE NATURALE

de Silviu Stössel, profesor, București

Notăm $S(p) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. În [1] se arată că sumele $S(1), S(2), \ldots, S(p)$ verifică următoarea relație de recurență

$$(n+1)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S(p) + C_{p+1}^2 S(p-1) + \ldots + C_{p+1}^p S(1) + n.$$

Utilizînd relația de recurență precedentă se demonstrează că $S(p)$ este un polinom de grad $p+1$ în $n$ și fără termen liber. Notăm

$$S(p) = a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_{p+1} n^{p+1}, \quad (1).$$

În cele ce urmează ne propunem să arătăm modul în care se pot determina coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ și să dăm un program BASIC pentru calculul lor. În (1) facem succesiv $n = 1, n = 2, \ldots, n = p+1$ și obținem următorul sistem liniar de $p+1$ ecuații cu $p+1$ necunoscute

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_{p+1} = 1^p \\ 2a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + 2^{p+1} a_{p+1} = 1^p + 2^p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p+1)\,a_1 + (p+1)^2 a_2 + \ldots + (p+1)^{p+1} a_{p+1} = 1^p + 2^p + \ldots + (p+1)^p. \end{cases}$$

Notînd

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2^2 & \ldots & 2^{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p+1 & (p+1)^2 & \ldots & (p+1)^{p+1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_{p+1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1^p \\ 1^p + 2^p \\ \ldots\ldots \\ 1^p + 2^p + \ldots + (p+1)^p \end{pmatrix},$$

obținem ecuația matriceală $A \cdot X = B$. Avem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2^2 & \ldots & 2^{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p+1 & (p+1)^2 & \ldots & (p+1)^{p+1} \end{vmatrix} = (p+1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & p+1 & \ldots & (p+1)^p \end{vmatrix} =$$

$$= (p+1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & p+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^p & 3^p & \dots & (p+1)^p \end{vmatrix} = (p+1)! \prod_{1 \le i < j \le p+1} (j-i) =$$

$$= (p+1)! \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot 1 = (p+1)! \, p! \, (p-1)! \dots 2! \, 1! \, 1!$$

Deci $\det(A) = 1!2!3! \dots (p+1)!$ și $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă.

Din $X = A^{-1}B$ se determină coeficienții $a_1, a_2, \dots, a_{p+1}$. Recapitulînd, putem spune că determinarea coeficienților $a_k$, $k = \overline{1, p+1}$, s-a redus la o inversare de matrice și la un produs de două matrice.

**Exemplu.** Să calculăm $S(2) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Fie $S(2) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$. Punem $n = 1, 2, 3$ și avem

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 = 1^2 + 2^2 \\ 3a_1 + 3^2 a_2 + 3^3 a_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2. \end{cases}$$

Notînd

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix},$$ obținem ecuația $A \cdot X = B$.

Calculînd inversa matricei $A$ avem

$$A^{-1} = \frac{1}{2!3!} \begin{pmatrix} 36 & -18 & 4 \\ -30 & 24 & -6 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$ și din $X = A^{-1}B$ avem $X = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

și deci $S(2) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3$.

Dăm în continuare programul BASIC care calculează coeficienții sumelor $S(p)$.

```
LIST

BASIC-PLUS - V2.1     88/12/88     13:40:42     S17(1,32767) LISTING

 10 INP „DAȚI ORDINUL SUMEI P=": P: N = P + 1
 20 DIM A(21,20): DIM Q(21,20): DIN X(20): DIM B(20)
 30 FOR I = 1 TO N
 40 FOR J = 1 TO N
 50 A (I, J) = I^J
 60 Q (I, J) = 0: IF I = J THEN Q(I, J) = 1
 70 NEXT J
 80 NEXT I
 90 B (1) = 1
100 FOR I = 2 TO N
110 B (I) = B (I - 1) + I^P
120 NEXT I
130 FOR K = 1 TO N
140 IF A(K, K) = 0 THEN C = 0
150 IF A(K, K) = 0 GOTO 280
160 D = A (K, K)
170 FOR J = 1 TO N
180 A (K, J) = A (K, J)/D: Q(K, J) = Q (K, J)/D
190 NEXT J
```



Scanned with OKEN Scanner

```
200 FOR I = 1 TO N
210 IF I = K GOTO 260
220 E = A (I, K)
230 FOR J = 1 TO N
240 A (I, J) = A (I, J) — E * A (K, J)
250 Q (I, J) = Q (I, J) — E * Q (K, J) : NEXT J
260 NEXT I : NEXT K
270 GOTO 390
280 C = C + 1
290 FOR J = 1 TO N
300 A (N + 1, J) = A (K, J) : Q (N + 1, J) = Q (K, J)
310 NEXT J
320 FOR L = K TO N
330 FOR J = 1 TO N
340 A(L, J) = A (L + 1, J) : Q (L, J) = Q (L + 1, J)
350 NEXT J
370 IF L <= N — K GOTO 150
390 PRI "NOTAȚI COEFICIENȚII SUMEI S("; P ;")"
400 FOR I = 1 TO N
410 X (I) = 0
420 FOR J = 1 TO N
430 X (I) = X (I) + Q(I, J) * B (J)
440 NEXT J
445 IF ABS (X(I)) <= 0,0001 THEN X(I) = 0
450 PRI "A ("; I; ") = "; X(I)
460 NEXT I
470 STOP
:

RUN S 17 . BAS
DAȚI ORDINUL SUMEI P = ?1
NOTAȚI COEFICIENȚII SUMEI S(1)
A (1) = 0.5
A (2) = 0.5
STOP AT LINE 470
:RUN S 17.BAS

DAȚI ORDINUL SUMEI P = ?2

>

NOTAȚI COEFICIENȚII SUMEI S(2)
A (1) = 0.166666
A (2) = 0.5
A (3) = 0.333333
STOP AT LINE 470
:RUN S 17.BAS

NOTAȚI COEFICIENȚII SUMEI S(3)
A (1) = 0
A (2) = 0.249996
A (3) = 0.500002
A (4) = 0.25
STOP AT LINE 470
:RUN S 17.BAS

DAȚI ORDINUL SUMEI P = ?4
NOTAȚI COEFICIENȚII SUMEI S(4)
A (1) = —, 333252E—01
A (2) = 0
A (3) = 0.333313
A (4) = 0.5
A (5) = 0.200002
STOP AT LINE 470
: RUN S 17 . BAS

DAȚI ORDINUL SUMEI P = ?5
```



Scanned with OKEN Scanner

```
NOTAȚI COEFICIENȚII SUMEI S(5)
A (1) = .854492E - 03
A (2) = - .839844E-01
A (3) = .732422E-03
A (4) = 0.416382
A (5) = 0.500031
A (6) = 0.166662
STOP AT LINE 470
]RUN S 17 · BAS

DAȚI ORDINUL SUMEI P = ?6
NOTAȚI COEFICIENȚII SUMEI S(6)
A (1) = .195313E-01
A (2) = .15625E-01
A (3) = - 0.144531
A (4) = .585938E-02
A (5) = 0.500488
A (6) = 0.499939
A (7) = 0.14286
STOP AT LINE 470
```

## Bibliografie

[1] *G. Năstăsescu, C. Niță, S. Popa* „Algebra. Manual pentru clasa a X-a" E.D.P. București, 1988

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ BUCUREȘTI, 19.II.1989

### Clasa a IX-a

**1.** Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

a) Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ nu este injectivă;

b) Să se arate că funcția $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ este injectivă dacă și numai dacă $\frac{b}{a} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

*Florin Vulpescu-Jalea*

**2.** Prin vîrful $A$ al triunghiului $ABC$ se duce dreapta $d$. Se notează cu $P$ și $N$ proiecțiile lui $B$ și $C$ pe dreapta $d$ și cu $M$ mijlocul segmentului $(BC)$. Să se arate că $|AM^2 - MP^2| = AP \cdot AN$.

*Th. Dănet*

**3.** Se dau mulțimile $M = \{x \in \mathbf{R} \mid x = p^2 + p + 20,\ p \in \mathbf{N}\}$ și $P = \{x \in \mathbf{R} \mid x = q^2 + q + 80,\ q \in \mathbf{N}\}$. Să se determine $M \cap P$.

*I. V. Maftei*

**4.** În triunghiul dreptunghic $ABC$ ($m(\hat{A}) = 90°$) ducem înălțimea $AA'$ și perpendicularele în $B$ și $C$ pe $BC$, care intersectează $AC$ și $AB$ în $B'$ și respectiv $C'$. Să se arate că:

a) $AB + AC \leq BC \cdot \sqrt{2}$;



Scanned with OKEN Scanner

b) $BB' + CC' \geqslant 4AA'$;

c) $\dfrac{AA' + BB' + CC'}{AB + AC + BC} \geqslant \dfrac{5}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)$.

*Emil Constantinescu*

## Clasa a X-a

**1.** Să se determine patrulaterele convexe $P$ care au proprietatea că pentru orice trei puncte necoliniare $A, B, C \in [P]$, rezultă $\sigma[ABC] \leqslant \leqslant \dfrac{1}{2}\sigma[P]$.

*Florin Vulpescu-Jalea*

**2.** Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$ știind că are loc relația: $\sin A \cdot \sin 4B + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos 4B = 1$.

*Th. Dăneț*

**3.** Fie $a, b, c \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze că:

a) Dacă $\operatorname{Re}(az + b\bar{z}) \geqslant 0$, $(\forall)\, z \in \mathbf{C}$, atunci $b = -\bar{a}$;

b) Dacă $\operatorname{Im}(az + b\bar{z}) \geqslant 0$, $(\forall)\, z \in \mathbf{C}$, actunci $b = \bar{a}$;

c) Dacă $\operatorname{Re}(az^2 + bz + c) \geqslant 0$, $(\forall)\, z \in \mathbf{C}$, atunci $b = a = 0$.

*Marcel Chiriță*

**4.** Fie $a, b, c > 0$. Să se arate că sistemul

$$\frac{x}{a(1+x^2)} = \frac{y}{b(1+y^2)} = \frac{z}{c(1+z^2)};\ xy + yz + zx = 1$$

admite soluții în $\mathbf{R}^3$ dacă și numai dacă $a, b, c$ sînt lungimile laturilor unui triunghi.

*V. Pateraău*

## Clasa a XI-a

**1.** Fie $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir descrescător cu limita 1 și

$$y_n = \left(1 + \frac{x_1}{n}\right)\left(1 + \frac{x_2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{x_n}{n}\right),\ n \geqslant 1.$$

Să se calculeze limita șirului $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

*Virgil Nicula*

**2.** Fie $n$ un număr natural. Să se determine toate tripletele $(a, b, c)$ de numere întregi, nu toate de aceeași paritate, astfel încît:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 2^n.$$

*M. Andronache*

**3.** Se dă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $x_1 \geqslant 0$, definit de relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par;} \\ \sqrt{x_n}, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Să se determine $x_1$, astfel încît şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ să fie convergent.

*V. Matrosenco*

**4.** Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \{1,2,\ldots,n\}$, iar $I$ şi $J$ submulţimi ale lui $B$, cu $p$ şi respectiv $q$ elemente, astfel încît $a_{ij} = 0$, $(\forall) i \in I$ şi $(\forall) j \in J$. Să se arate că dacă $p + q > n$, atunci $\det A = 0$.

*I. Savu*

## Clasa a XII-a

**1.** Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ şi $A$ mulţimea endomorfismelor sale.

a) Să se arate că $(A, *)$ este un grup comutativ, unde $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, pentru orice $f, g \in A$ şi $x \in G$;

b) Dacă $G$ este finit, să se arate că numărul elementelor sale are aceeaşi paritate cu numărul elementelor lui $A$.

*M. Andronache*

**2.** Să se determine primitivele funcţiei $f(x) = \left(\dfrac{x}{x\sin x + \cos x}\right)^2$ pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

*Virgil Nicula*

**3.** Se dau funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot \sin x$ şi $h(x) = f(x) \cdot \cos x$. Să se arate că dacă $g$ şi $h$ au primitive pe $\mathbb{R}$, atunci $f$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

*Florin Vulpescu-Jalea*

**4.** Fie $a > 0$, $G = (-a, a)$ şi $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, pentru care $xy \neq -1$.

a) Să se determine $a$, astfel încît $*$ să fie operaţie algebrică pe mulţimea $G$ şi să se arate că $(G, *)$ este grup;

b) Folosind, eventual, faptul că funcţia $g : \mathbb{R} \to (-1,1)$, $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ este bijectivă, să se determine toate morfismele de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$, care sînt funcţii continue.

*I.V. Maftei şi V. Matrosenco*



Scanned with OKEN Scanner

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ
## PRAHOVA, 12.II.1989

### Clasa a IX-a

**1.** Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m+1)x^2 - (2m+1)x + m = 0, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}\}$.
Să se calculeze $A \setminus \mathbb{Z}$.

*Adrian Ghioca* și *Dragoș Moldoveanu*, profesori, Sinaia

**2.** Să se arate că ecuația

$$a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-a)(x-b) = 0$$

are rădăcini reale și egale dacă și numai dacă $a = b = c$.

*Ștefan Tache*, profesor, Cîmpina

**3.** Fie $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ cu proprietatea $(f \circ f)(x) = 2x^2 - 3x + 2$, $(\forall)\, x \in [1, \infty)$.
a) Să se arate că $f$ este bijectivă;
b) Să se calculeze $f(1)$;
c) Să se arate că funcția
$g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + (f(x) - 4)x - 2f(x) + 7$
nu e injectivă.

*Mihai Răileanu*, profesor, Ploiești

**4.** În triunghiul $ABC$ se consideră medianele $AA'$ și $CC'$, $A' \in (BC)$, $C' \in (AB)$. Știind că $m(\widehat{BAA'}) = m(\widehat{BCC'}) = 30°$, să se precizeze natura triunghiului $ABC$.

*Ovidiu Avramescu*, profesor, Ploiești

### Clasa a X-a

**1.** a) Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci $\dfrac{1}{n-2} \cdot \sum_{k=2}^{n-1} \sqrt{\log_k n \cdot \log_{\frac{n}{k}} n} \geq 2$.

*Adrian Ghioca*, profesor, Sinaia

b) Să se calculeze $\sqrt{36^{\log_6 5} + 10^{1-\operatorname{tg} 2} - 3^{\log_3 36} + 1}$.

*Ștefan Tache*, profesor, Cîmpina

**2.** Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{1}{\sin a}\right)^x - \left(\frac{1}{\operatorname{tg} a}\right)^x = 1, \text{ unde } a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

*Octavian Purcaru*, profesor, Ploiești

**3.** Fie $G$ și $H$ centrul de greutate și ortocentrul unui triunghi $ABC$ în care $GH \parallel AB$. Știind că $\operatorname{tg} A = 3$, să se arate că $H$ e mijlocul unei înălțimi.

*Petre Năchilă*, profesor, Ploiești

**4.** Să se demonstreze că într-un triunghi ascuțitunghic are loc relația $p > R\sqrt{2}$.

*Constantin Stere*, Cîmpina



Scanned with OKEN Scanner

## Clasa a XI-a

**1.** Fie $k$ un număr real. Definim șirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin

$$a_n = \frac{3^n \cdot k + 1}{3^{n+1} - 1},\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Să se stabilească monotonia șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ după valorile parametrului $k$;

b) Pentru $k = 1$ să se arate, folosind definiția limitei unui șir, că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

*Eugen Onofraș*, profesor, Ploiești

**2.** Fie șirul definit astfel: $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 - x_n - \frac{1}{2}$, $(\forall)\ n \geqslant 0$ și $x_0 \in (3 - \sqrt{5},\ 1)$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

*Petre Năchilă*, profesor, Ploiești

**3.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$ și fie $AD \perp BC$, $DE \perp AC$, cu $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, iar $F$ mijlocul segmentului $(DE)$. Arătați că $AF \perp BE$.

*Gheorghe Albu*, profesor, Bușteni

**4.** Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\ldots 1 & 1 & 1\ldots 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1\ldots 1 & 2 & 1\ldots 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\ldots 1 & 3 & 1\ldots 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1\ldots 2 & m-1 & 1\ldots 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\ldots 1 & m & 1\ldots 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\ldots 1 & m+1 & 2\ldots 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1\ldots 1 & n-1 & 1\ldots 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1\ldots 1 & n & 1\ldots 1 & 2 \end{vmatrix} = (n+1)\left(m - \frac{n}{2}\right),$$

(m)

unde $(m)$ reprezintă coloana de ordin $m$ $(1 < m < n)$.

*Mihai Răileanu*, profesor, Ploiești

## Clasa a XII-a

**1.** Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ și $x * y \overset{def}{=} xy + ax + by + c$. Ce condiții trebuie să îndeplinească $a$, $b$ și $c$ pentru ca $((d, \infty), *)$ să fie un grup abelian?

**2.** Să se determine grupurile $(G, \cdot)$ care au un subgrup $H$ astfel încît $G \setminus H$ are exact două elemente. Studiați comutativitatea acestor grupuri.

* * *

**3.** Fie $I_k = \int \operatorname{arc\,tg} \sqrt[k]{x}\, dx$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$. Calculați $I_2$ și $I_3$.

*Ștefan Tache*, profesor, Cîmpina

**4.** Calculați:

$$\int \frac{\sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2} + \ln x^{x+1}}{\sin x + x \ln x}\, dx, \quad x \in (1, \pi).$$

*Constantin C. Florea*, profesor, Cîmpina

## PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

### Clasa a V-a

**Problema E: 9426*** (G.M. 5–6/1988, pag. 239)

*Determinați un număr scris cu zece cifre distincte, multiplu de 125. Este unic acest număr?*

*Ion Dumitrescu*, profesor, Satu Mare

*Soluție.* Un număr $A$ format cu zece cifre distincte se va scrie în baza zece: $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$, unde $a_{10}$ este cifra unităților, $a_9$ este cifra sutelor, $a_8$ este cifra miilor, etc. Avem, evident:

$$A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \cdot 1000 + \overline{a_8a_9a_{10}}.$$

Deoarece: $1000 \mid 125$, rezultă că $A \mid 125$ dacă și numai dacă $\overline{a_8a_9a_{10}} \mid 125$.

Cifrele trebuind să fie distincte, vom avea $\overline{a_8a_9a_{10}} \in \{125, 250, 375, 625, 750, 875\}$ și atunci $A \mid 125$.

Dacă luăm de exemplu $a_8 = 1$, $a_9 = 2$, $a_{10} = 5$, atunci cifrele $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ le alegem astfel încît să avem egalitatea de mulțimi:

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\} = \{0, 3, 4, 6, 7, 8, 9\} \text{ și în plus, } a_1 \neq 0.$$

Deci numărul cerut în problemă nu este unic.

Exemple de numere care satisfac de asemenea enunțul: 3467890125, 1467983250, etc.

Soluție bună au dat: *Albu Daniel*, cl. a V-a, Șc. gen. Vaduri; *Asoltani Mona* cl. a V-a, Șc. gen. 6 Vaslui; *Ravaru Vasile*, cl. a V-a, Șc. gen. 11 Roman.

### Clasa a VI-a

**Problema E: 9433*** (G.M. 5–6/1988, pag. 240)

*Pentru fiecare $m \in \mathbf{Z}$ se consideră numerele $x = m^3 + 1$, $y = m^3 - 1$. Să se arate că dacă $m$ nu se divide cu 7 atunci produsul $x \cdot y$ se divide cu 7.*

*Constantin Onel*, profesor, Satu Mare

*Soluție.* Deoarece $m$ nu se divide cu 7, este de forma $m = 7q + r$, cu $r \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Avem:

$$x = (7q + r)^3 + 1 = \mathcal{M}7 + r^3 + 1$$

$$y = (7q + r)^3 - 1 = \mathcal{M}7 + r^3 - 1$$

de unde

$$x \cdot y = (\mathcal{M}7 + r^3)^2 - 1 = \mathcal{M}7 + r^6 - 1, \text{ cu } r \in \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

Fie $p = r^6 - 1$, care se mai poate scrie:

$$p = (r^3 - 1)(r^3 + 1) = (r - 1)(r + 1)(r^2 - r + 1)(r^2 + r + 1).$$

Pentru $r = 1$ avem $p = 0$, deci $x \cdot y = \mathcal{M}7$.
Pentru $r = 2$ sau $r = 4$ avem $r^2 + r + 1 \nmid 7$, deci $p = \mathcal{M}7$, deci $x \cdot y = \mathcal{M}7$.
Pentru $r = 3$ sau $r = 5$ avem $r^2 - r + 1 \nmid 7$, deci $p = \mathcal{M}7$, deci $x \cdot y = \mathcal{M}7$.
Pentru $r = 6$ avem $r + 1 = 7$, deci $p = \mathcal{M}7$, deci $x \cdot y = \mathcal{M}7$.

Soluție bună au dat: *Mureșan Mihaela*, cl. a VI-a, Șc. gen. 17 Baia Mare; *Sabău Cristina*, cl. a VI-a, Șc. gen. 25 Galați; *Rotaru Elena*, cl. a VI-a, Șc. gen. Gh. Doja.

**Problema E: 9437*** (G.M. 5—6/1988, pag. 241)

*Să se afle numerele care împărțite la 52 dau citul 3 și restul mai mare ca 1, iar împărțite la 43 dau citul 3.*

*Florentin Smarandache*, Craiova

*Soluție.* Fie $x$ unul din numerele cerute. Conform enunțului avem:

$$x = 52 \cdot 3 + r_1 \text{ cu } 1 < r_1 < 52, \quad (1);$$

$$x = 43 \cdot 3 + r_2 \text{ cu } 0 \leqslant r_2 < 43, \quad (2).$$

Din (1) obținem $157 < x < 208$, adică $x \in \{158, 159, \ldots, 207\}$.
Din (2) obținem $129 \leqslant x < 172$, adică $x \in \{129, 130, \ldots, 171\}$.
Intersectînd cele două mulțimi obținem $x \in \{158, 159, \ldots, 171\}$, deci avem 14 numere care verifică enunțul.

Soluție bună au dat: *Stredie Valentin*, cl. a VI-a, Șc. gen. 5 Peghin; *Andrei Adina*, cl. a VI-a, Șc. gen. 6 Hunedoara.

**Problema E: 9442*** (G.M. 5—6/1988, pag. 241)

*Triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ are $\hat{C} = 10°$. Fie $M$ punctul în care bisectoarea interioară a unghiului $\hat{A}$ intersectează ipotenuza $BC$, iar $N$ punctul în care perpendiculara dusă în $M$ pe $BC$ taie catela $AC$. Să se determine măsura unghiului $\widehat{ABN}$.*

*Ion Z. Predescu*, profesor, Rast, Dolj

*Soluție.* Avem $\widehat{CAM} \equiv \widehat{MAB} = 45°$. În triunghiul $ACM$ obținem $\widehat{AMC} = 180° - (\hat{C} + \widehat{CAM}) = 125°$. Dar $\widehat{NMC} = 90°$, deci $\widehat{AMN} = 35°$, (1).

Patrulaterul $ABMN$ este inscriptibil ($\widehat{NAB} \equiv \widehat{NMB} = 90°$). Prin urmare $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ABN}$, (2). Ținînd seama de (1) și (2) obținem $\widehat{ABN} = 35°$.

Soluție bună au dat: *Enache Oana*, cl. a VI-a, Șc. gen. 25 Galați; *Bădulescu Cătălin*, cl. a VI-a, Șc. gen. 12 Tg. Jiu.

## Clasa a VII-a

**Problema E: 9447*** (G.M. 5—6/1988, pag. 242)

*Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AC \perp BC$, iar punctele $M$ și $E$ mijloacele laturilor $AB$ și respectiv $CD$. Pe latura $AB$ se ia un punct $F$ astfel încît $\widehat{MDC} \equiv \widehat{EFA}$. Să se arate că patrulaterul $MECF$ este inscriptibil dacă și numai dacă $ABCD$ este inscriptibil.*

*Maria Sichet*, profesoară, Satu Mare



Scanned with OKEN Scanner

*Soluție.* Dacă $ABCD$ este inscriptibil și $\widehat{ACB} = 90^\circ$, atunci patrulaterul $ABCD$ e înscris într-un semicerc de centru $M$ și rază $AM$. Rezultă $MA \equiv MB \equiv MC \equiv MD$ ca raze, deci triunghiul $MCD$ este isoscel cu $\widehat{MDC} \equiv \widehat{MCD}$. Dar $\widehat{MDC} \equiv \widehat{EFA}$, prin urmare $\widehat{MCD} \equiv \widehat{EFA}$, adică $\widehat{MCE} \equiv \widehat{EFM}$, de unde rezultă că $MECF$ este inscriptibil.

Reciproc, dacă $MECF$ este inscriptibil rezultă că $\widehat{MFE} \equiv \widehat{MCE}$; dar $\widehat{MFE} \equiv \widehat{MDC}$, deci $\widehat{MCE} \equiv \widehat{MDC}$. Prin urmare triunghiul $MDC$ este isoscel cu $MD \equiv MC$, (1). Dar $MC$ este mediană în triunghiul dreptunghic $ABC$, deci $MA \equiv MB \equiv MC$, (2). Din (1) și (2) obținem $MA \equiv MB \equiv MC \equiv MD$. Rezultă că $A, B, C, D$ se află pe un cerc cu centrul în $M$, deci $ABCD$ este inscriptibil.

Soluții bune au dat: *Lăzărescu Dragoș* cl. a VII-a, Șc. gen. 1 Baia-Mare; *Asaftei Laura*, cl. a VII-a, Șc. gen. 15 Bacău; *Voinea Alina*, cl. a VII-a, Șc. gen. 4 Gherla.

**Problema E: 9451*** (G.M. 5—6/1988, pag. 243)

*Să se afle perimetrul și aria unui triunghi, știind că lungimile laturilor sînt exprimate prin trei numere întregi consecutive, iar numeric, perimetrul este egal cu jumătatea ariei triunghiului.*

*Ion Dumitrescu*, prof., Satu Mare

*Soluție.* Fie $x-1$, $x$ și $x+1$ lungimile laturilor triunghiului, $x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Avem perimetrul $P = 3x$ și folosind formula lui *Heron* aria va fi $A = \sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x+2}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x-2}{2}}$.

Ținînd seama de enunțul problemei obținem:

$$P = \frac{1}{2} A \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{4} \sqrt{3(x^2-4)} \Leftrightarrow 24 = \sqrt{3(x^2-4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 576 = 3(x^2-4) \Leftrightarrow x^2 - 4 = 192 \Leftrightarrow x^2 = 196,$$

de unde $x = 14$ sau $x = -14$. Deoarece $x$ reprezintă lungimea unui segment reținem numai soluția $x = 14$. Așadar, laturile triunghiului au lungimile 13, 14 și 15. Obținem $P = 42$ și $A = 84$.

Soluție bună au dat: *Gherman Ligia*, cl. a VII-a, Șc. gen. 1 Șomcuta Mare; *Mindraș Veronica* cl. a VII-a, Șc. gen. Bilan; *Minfă Gheorghe*, cl. a VII-a, Șc. gen. 108 București.

**Problema E: 9453*** (G.M. 5—6/1988, pag. 243)

*Ipotenuza $BC$ a unui triunghi dreptunghic are măsura egală cu unitatea și se împarte în cinci părți congruente $BM \equiv MN \equiv NR \equiv RT \equiv TC$. Să se arate că $AT^2 + AM^2 = \frac{17}{25}$.*

*Să se generalizeze problema în cazul în care ipotenuza este de măsură unitatea și se împarte în $n$ părți congruente; să se verifice relația găsită pentru $n = 5$.*

*Andrei Boroș*, profesor, Baia Mare

*Soluție.* Fie $D$ mijlocul ipotenuzei $BC$. Avem: $AD = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}$; $BM \equiv MN \equiv NR \equiv RT \equiv TC = \frac{1}{5}$; $MT = \frac{3}{5}$ și deoarece $BM \equiv TC$ rezultă că $D$ este și mijlocul segmentului $MT$, deci $AD$ este mediană în triunghiul $AMT$. Conform formulei lungimii medianei într-un triunghi oarecare, obținem

$$4AD^2 = 2(AM^2 + AT^2) - MT^2, \quad (1)$$



Scanned with OKEN Scanner

de unde, înlocuind $AD$ și $MT$ deducem:

$$2(AM^2 + AT^2) = 4 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{5}\right)^2, \text{ adică } AM^2 + AT^2 = \frac{17}{25}, \quad (2).$$

*Generalizare:* Dacă împărțim ipotenuza $BC$ în $n$ părți congruente și dacă notăm cu $M$ și $T$ punctele de pe ipotenuză pentru care $BM \equiv TC \equiv \frac{1}{n}$, avem $MT = \frac{n-2}{n}$.

Fie $D$ mijlocul lui $BC$, deci $D$ este și mijlocul lui $MT$. Din relația (1) obținem:

$$2(AM^2 + AT^2) = 4 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^2, \text{ adică}$$

$$AM^2 + AT^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n^2 - 4n + 4}{n^2}, \text{ sau}$$

$$AM^2 + AT^2 = \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2}, \quad (3).$$

Pentru $n = 5$, din formula generală (3) obținem relația (2).

Soluție bună au dat: *Adam Gabriela*, cl. a VII-a, Șc. gen. 23 Galați; *Stanca Alin*, cl. a VII-a, Lic. mat. fiz. Sf. Gheorghe.

## Clasa a VIII-a

**Problema E: 9465*** (G.M. 5–6/1988, pag. 245)

*Se dau polinoamele $P$ și $Q$ cu proprietatea că $P(x) = Q(x) + Q(1 - x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Știind că $P$ are coeficienții naturali și că $P(0) = 0$, calculați $P(P(3))$.*

*Teodor Bănică*, elev, București

*Soluție.* Pentru $x = 0$ și $x = 1$, folosind relația din enunț obținem: $P(0) = Q(0) + Q(1)$ și $P(1) = Q(1) + Q(0)$, de unde rezultă că $P(0) = P(1)$. Dar $P(0) = 0$, deci $P(1) = 0$. Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt numere naturale. Deoarece $P(1) = 0$ rezultă că $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$ și deoarece toate numerele din sumă sînt naturale rezultă că $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$, adică $P$ este polinomul nul. În concluzie, $P(P(3)) = 0$.

Soluție bună au dat: *Luța Adrian*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 32 Craiova; *Enescu Diana*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 5 Târgoviște; *Apetrei Gabriel*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 7 Botoșani.

**Problema E: 9457*** (G.M. 5–6/1988, pag. 244)

*Să se determine din mulțimea paralelipipedelor dreptunghice având lungimea diagonalei o constantă dată, cel paralelipiped a cărui arie totală este maximă.*

* * *

*Soluție.* Dacă notăm cu $x, y, z$ dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic din mulțimea dată și cu $d$ lungimea diagonalei, avem că $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{constant}$. Aria totală a paralelipipedului este: $A = 2(xy + xz + yz)$. Dar $2(xy + xz + yz) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2)$, căci această inegalitate este echivalentă cu $0 \leq (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2$, care este evidentă și în care avem egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$.

Rezultă $A \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2d^2 = \text{constant}$, și deci, aria totală este maximă cînd $A = 2d^2$, și aceasta se întîmplă dacă și numai dacă $x = y = z$, adică dacă și numai dacă paralelipipedul este cub.

Soluție bună au dat: *Hoțea Vlad*, cl. a VIII-a, Lic. „Garabet Ibrăileanu" Iași; *Patuchi Roxana*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 2 Cugir; *Țenșan Alin*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 1 Seini.



Scanned with OKEN Scanner

# PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

## Clasa a IX-a

**Problema 21442** (G. M. 5/1988, pag. 254)

*Se dă triunghiul* $ABC$ *cu* $m(\hat{A}) = 50°$ *şi* $m(\hat{B}) = 60°$. *Se consideră* $M \in (AB)$ *şi* $N \in (AC)$ *astfel încît* $m(\widehat{ABN}) = 20°$ *şi* $m(\widehat{ACM}) = 30°$. *Să se determine* $m(\widehat{ANM})$.

*Alin Pop*, profesor, Suplai, Zagra, Bistriţa-Năsăud

*Soluţia autorului.* Fie $\{O\} = MB \cap CM$. Avem $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB}) = 40°$ deci triunghiul $BOC$ este isoscel cu $m(\widehat{BOC}) = 100° = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$. Rezultă că punctul $O$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$. Fie $P \in (BC)$ astfel încît $m(\widehat{BNP}) = 40°$. Deoarece $\widehat{OCP} \equiv \widehat{ONP}$ rezultă că patrulaterul $OPCN$ este inscriptibil deci $m(\widehat{COP}) = m(\widehat{CNP}) = m(\widehat{BNC}) - m(\widehat{BNP}) = 30°$. Cum $m(\widehat{OCN}) = 30° = m(\widehat{PNC})$ rezultă că $OP \parallel AN$. Dar $OA = OC$, deoarece $O$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$, deci $m(\widehat{OAN}) = m(\widehat{OCA}) = 30° = m(\widehat{PNC})$. Rezultă că $\widehat{OAC} \equiv \widehat{PNC}$, deci $OA \parallel PN$. Deoarece şi $OP \parallel AN$ rezultă că patrulaterul $AOPN$ este paralelogram deci $(NP) \equiv (OA)$, (1).

În triunghiul $MBO$ avem $m(\widehat{MBO}) = 20°$ şi $m(\widehat{BOM}) = 180° - m(\widehat{BOC}) = 80°$, deci şi $m(\widehat{BMO}) = 80°$, adică triunghiul $MBO$ este isoscel, deci $(MB) \equiv (BO)$, (2).

Din construcţia punctului $P$ avem că $m(\widehat{PNB}) = 40° = m(\widehat{NBP})$, deci triunghiul $BPN$ este isoscel, deci $(PB) \equiv (PN)$, (3).

Din (1), (2) şi (3) rezultă că $OA = OB = OC = MB = NP = BP$, (4). Aşadar triunghiul $MBP$ este isoscel şi cum $m(\widehat{MBP}) = 60°$, rezultă că triunghiul $MBP$ este echilateral, adică $MP = BP$, deci $MP = PN$, adică triunghiul $MPN$ este isoscel cu unghiul din vîrf de măsură $m(\widehat{MPN}) = 180° - m(\widehat{BPM}) - m(\widehat{NPC}) = 180° - 60° - 80° = 40°$. Rezultă că unghiurile de la baza triunghiului $MPN$ sînt congruente, avînd $m(\widehat{PMN}) = m(\widehat{PNM}) = 70°$. În concluzie, $m(\widehat{ANM}) = 180° - m(\widehat{PNM}) - m(\widehat{PNC}) = 180° - 70° - 30° = 80°$.

**Problema 21437** (G. M. 5/1988, pag. 253)

*Fie funcţiile* $f, g: A \to A$ *cu proprietăţile:*

a) *Funcţia* $g$ *este bijectivă;* b) $f \circ g^{-1} \circ f = 1_A$.

*Să se arate că:*

1) *Funcţia* $f$ *este bijectivă;*

2) $f \circ f = g$;

3) $f \circ g = g \circ f$.

*Rodica Pop*, Satu Mare

*Soluţie.* 1) Vom aplica proprietatea că dacă $F \circ G = H$ şi $H$ este injectivă atunci $G$ este injectivă, iar dacă $F \circ G = H$ şi $H$ este surjectivă, atunci $F$ este surjectivă. În problema noastră avem $f \circ g^{-1} \circ f = 1_A$. Compunînd la dreapta şi apoi la stînga cu $g^{-1}$ obţinem $(f \circ g^{-1}) \circ (f \circ g^{-1}) = g^{-1} = (g^{-1} \circ f) \circ (g^{-1} \circ f)$.

Din prima egalitate rezultă că $f \circ g^{-1}$ este bijectivă şi din a doua egalitate rezultă că $g^{-1} \circ f$ este bijectivă, conform proprietăţii amintite mai sus.

Din faptul că $f \circ g^{-1}$ este bijectivă rezultă că $f$ este surjectivă, iar din faptul că $g^{-1} \circ f$ este bijectivă rezultă că $f$ este injectivă, deci $f$ este bijectivă, deci şi inversabilă.

2) Pornind de la ipoteza $f \circ g^{-1} \circ f = 1_A$, prin compunerea la stînga cu $f$ şi la dreapta cu $f^{-1}$, obţinem $f \circ f \circ g^{-1} \circ f \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} \Leftrightarrow f \circ f \circ g^{-1} = 1_A$ şi prin compunere la dreapta cu $g$ obţinem $f \circ f \circ g^{-1} \circ g = g$ sau $f \circ f = g$.



Scanned with OKEN Scanner

3) Din relația $f \circ f = g$, prin compunere la stînga cu $f$ obținem: $f \circ f \circ f = f \circ g \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g \circ f = f \circ g$, unde am ținut seama de relația $f \circ f = g$.

Soluție bună au dat: *Chiper Violeta*, cl. a IX-a, Lic. ind., „Unirea" Focșani; *Alecu Orlando*, cl. a IX-a, Lic. ind. 2 Roșiorii de Vede; *Matărău Elvis*, cl. a IX-a, Lic. ind. 1 Craiova.

## Clasa a X-a

**Problema 21380*** (G. M. 3/1988, pag. 135)

*Să se demonstreze că dacă ecuația* $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, $a_i \in \mathbf{R}$, *are toate rădăcinile reale și strict pozitive, atunci:*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\right| \geqslant 2^n \cdot \sqrt{|a_0 a_n|}.$$

*Mitică Temneanu*, elev, Iași

*Soluție.* Notăm cu $x_i$, $i = \overline{1,n}$ rădăcinile ecuației date, care prin ipoteză sînt numere reale strict pozitive. Aplicînd inegalitatea dintre media aritmetică și cea armonică numerelor 1, $x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $x_ix_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, $x_ix_jx_k$ $(1 \leqslant i < j < k \leqslant n), \ldots, x_1x_2\ldots x_n$, care sînt în număr total de $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$, obținem inegalitatea:

$$(1 + \Sigma x_1 + \Sigma x_1x_2 + \ldots + x_1x_2\ldots x_n)\left(1 + \Sigma\frac{1}{x_1} + \Sigma\frac{1}{x_1x_2} + \ldots + \frac{1}{x_1x_2\ldots x_n}\right) \geqslant (2^n)^2.$$

După ce aducem la același numitor în a doua paranteză, inegalitatea devine:

$$\frac{(1 + \Sigma x_1 + \Sigma x_1x_2 + \ldots + x_1x_2\ldots x_n)^2}{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant 2^{2n}$$

sau, ținînd seama de formulele lui *Viète*:

$$\frac{\left(1 + \left(-\frac{a_1}{a_0}\right) + \frac{a_2}{a_0} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}\right)^2}{(-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}} \geqslant 2^{2n}.$$

Deoarece $(-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0} = x_1x_2\ldots x_n > 0$, putem elimina numitorul fracției mari și obținem

$$\frac{1}{a_0^2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\right)^2 \geqslant 2^{2n} \cdot (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}.$$

Înmulțim cu $a_0^2 > 0$ și rezultă

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\right)^2 \geqslant 2^{2n} \cdot (-1)^n a_n a_0 = 2^{2n} \cdot |a_0 a_n|, \tag{1}$$

unde pentru ultima egalitate am ținut seama că $(-1)^n a_n a_0 = a_0^2 \cdot (-1)^n \frac{a_n}{a_0} > 0$, deci

$$(-1)^n a_n a_0 = |a_n a_0|.$$

Extrăgînd atunci radicalul în inegalitatea (1) rezultă

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\right| \geqslant 2^n \cdot \sqrt{|a_0 a_n|}$$



Scanned with OKEN Scanner

adică inegalitatea din enunț.

Soluție bună au dat: *Giurescu Romulus*, cl. a X-a, Lic. „R. Greceanu" Slatina; *Belcea Mihail*, cl. a XI-a, Lic. Ind. Buhuși.

**Problema 21383*** (G. M. 3/1988, pag. 136)

*Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{3^x-1}{3^x+1}=2^{-x}.$$

*Soluție.* Ecuația se mai scrie $3^x+1=2^x(3^x-1)$ sau $2^x+3^x+1=6^x$. Împărțind prin $6^x>0$, ea devine:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^x=1, \tag{1}$$

Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^x$ este o sumă de trei funcții strict descrescătoare, deci este la rîndul său o funcție strict descrescătoare și ca atare, injectivă.

Observînd că $x=1$ verifică ecuația dată; rezultă că forma (1) a ecuației devine:

$$f(x)=f(1), \tag{2}$$

Din (2) și din faptul că $f$ este injectivă, rezultă că $x=1$, deci ecuația are soluție unică.

Soluție bună au dat: *Morotanu Sergiu*, cl. a X-a, Lic. mat. fiz. 1 București; *Stamate Dan*, cl. a XI-a, Lic. „N. Bălcescu" Pitești.

## Clasa a XI-a

**Problema 21461*** (G. M. 5—6/1988, pag. 256)

*Fie $A\in M_n(\mathbf{R})$ o matrice în care $a_{ij}=0$ pentru $i+j=$ par, $1\leqslant i,j\leqslant n$. Să se arate că dacă $n$ este impar, atunci determinantul matricei $A$ este nul.*

*Gheorghe Bordea*, Constanța

*Soluție.* Cu elementele matricei $A$ și înlocuind elementele nule ale matricei cu $x$, construim determinantul:

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x & a_{12} & x & a_{14} & \dots & x \\ a_{21} & x & a_{23} & x & \dots & a_{2n} \\ x & a_{32} & x & a_{34} & \dots & x \\ a_{41} & x & a_{43} & x & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & a_{n2} & x & a_{n4} & \dots & x \end{vmatrix}$$

Înmulțind coloanele de ordin impar cu $(-1)$ obținem:

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}}D_n(x)=\begin{vmatrix} -x & a_{12} & -x & a_{14} & \dots & -x \\ -a_{21} & x & -a_{23} & x & \dots & -a_{2n} \\ -x & a_{32} & -x & a_{34} & \dots & -x \\ -a_{41} & x & -a_{43} & x & \dots & -a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & a_{n2} & -x & a_{n4} & \dots & -x \end{vmatrix}$$



Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind liniile de ordin par cu $(-1)$ obținem:

$$(-1)^n D_n(x) = -D_n(x) = \begin{vmatrix} -x & a_{12} & -x & a_{14} & \dots & -x \\ a_{21} & -x & a_{23} & -x & \dots & a_{2n} \\ -x & a_{32} & -x & a_{34} & \dots & -x \\ a_{41} & -x & a_{43} & -x & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & a_{n2} & -x & a_{n4} & \dots & -x \end{vmatrix} = D_n(-x).$$

Cum $D_n(-x) = -D_n(x)$ rezultă că $D_n(0) = 0$. Dar $D_n(0) = \det A$. Rezultă $\det A = 0$.

Soluție bună au dat: *Cosma Marian*, cl. a XI-a, Lic. mat. fiz. București; *Stănică Daniel*, cl. a XII-a, Lic. ind. 3 Câmpulung Muscel.

## Clasa a XII-a

**Problema 21432** * (G. M. 5–6/1988, pag. 259)

*Să se calculeze:*

$$\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x}\,dx, \quad x \in (-\infty, 0).$$

* * *

*Soluție.* Integrala nedefinită din enunț se mai poate scrie:

$$I = \int (e^{-x}) \arcsin(e^x)\,dx.$$

Considerăm $f'(x) = e^{-x}$ și $g(x) = \arcsin(e^x)$. Rezultă că

$$f(x) = -(e^{-x}) \text{ și } g'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Aplicînd formula de integrare prin părți

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

pentru funcțiile $f, g$ considerate mai sus, obținem:

$$I = -(e^{-x})\cdot \arcsin(e^x) + \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$$

Dar pe de altă parte avem:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = -\int \frac{(e^{-x})'}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}\,dx = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1}) =$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{e^x} + \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\right) = -\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}}) + x.$$

Deci: $\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x}\,dx = -(e^{-x})\cdot\arcsin(e^x) - \ln(1+\sqrt{1-e^{2x}}) + x + C.$

Soluție bună au dat: *Bîrsan Dorian*, cl. a XII-a, Lic. ind. chimie, Victoria; *Oancea Corneliu*, cl. a XII-a, Lic. „Gh. Lazăr" Sibiu



Scanned with OKEN Scanner

**33.** Raluca are de 5 ori mai multe mărci poştale decît fratele său Răducu. Dacă ea ar da lui Răducu 100 de mărci atunci cei doi fraţi ar avea acelaşi număr de mărci poştale. Cîte mărci poştale au avut fiecare iniţial?

*Ioana Pencea*, învăţătoare, Videle

**34.** Găsiţi toate perechile de numere naturale $(a, b)$ care verifică egalitatea

$$(a + 3) \times (b + 4) = 72.$$

*Ioana Pencea*, învăţătoare, Videle

**35.** Tatăl, mama şi fiul şi-au propus să amenajeze o grădiniţă cu flori. Lucrînd fiecare singur, tata ar termina lucrarea în 4 ore, mama în 6 ore, fiul în 12 ore. În cîte ore s-ar termina lucrarea dacă ar lucra împreună toţi membrii familiei?

*Mihai Dănuţ Grădinaru*, elev, Constanţa

**36.** Produsul a trei numere naturale diferite este 336. Produsul dintre primele două numere este 84. Primul număr este de 7 ori mai mare decît al treilea număr. Care sînt cele trei numere?

*Ion Diea*, învăţător, Bacău

**37.** Pe partea dreaptă a unei străzi sînt cu 4 pomi mai mulţi decît pe partea stîngă, iar pe altă stradă, pe fiecare parte un număr dublu de pomi faţă de numărul total de pomi de pe prima stradă. Cîţi pomi sînt pe fiecare parte a fiecărei străzi, dacă în total pe cele două străzi sînt 220 de pomi?

*Gh. Vicol-Ţurcanu*, învăţător, Vatra-Dornei

**38.** Aleg un număr pe care îl împart la 5, iar rezultatul îl împart iarăşi la 5 şi obţin un cît de două ori mai mare decît împărţitorul. Ştiind că la cele două împărţiri restul este zero de fiecare dată, să se afle ce număr am ales?

*Gh. Vicol-Ţurcanu*, învăţător, Vatra-Dornei

**39.** Să se determine valoarea lui $x$ din următoarea egalitate:

$$\frac{214 \cdot 5 - 7000 : 100}{314 \cdot 2{,}5 + 4945 : 23} + 199 - 50 \cdot x = 150.$$

*Sabina Savu* şi *Gh. Savu*, învăţători, Mioveni, Argeş

**40.** Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ ştiind că

$$b = a + c = 5.$$

*Sabina Savu* şi *Gh. Savu*, învăţători, Mioveni, Argeş



Scanned with OKEN Scanner

## PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

### Clasa a V-a

**E : 9707*.** Să se afle numărul prim de forma $\overline{aab}$ scris în baza 10, știind că $\overline{aab} + \overline{baa} + \overline{aba} = 2775$.

*George Georgescu*, profesor, Timișoara

**E : 9708.** Să se determine toate pătratele perfecte de forma $\overline{zxyxy}$ divizibile cu $\overline{xy}$, în care $x, y, z$ sînt cifre distincte, iar $z \in \{4; 9\}$.

*Maria Vizuroiu, Nicolae Vizuroiu*, profesori, Pitești

**E : 9709*.** Să se determine trei numere naturale consecutive $a$, $b$ și $c$ astfel încît $a^b + b^c > b^a + c^b$.

*Bogdan Rotar*, elev, Rădăuți, Suceava

**E : 9710.** Să se compare numerele :

a) $(123/245)^{10}$ și $(647/1296)^{17}$;
b) $(271/405)^{15}$ și $(473/711)^{19}$;

*Ion Burda*, profesor, Amărăști, Vîlcea

**E : 9711.** Să se determine numerele de două cifre $\overline{ab}$, în sistemul zecimal, astfel încît $b^3 = 125 \cdot a$.

*Alexandru Cebuc*, profesor, Coteana, Olt

**E : 9712*.** Să se determine toate numerele de trei cifre care satisfac simultan condițiile :

a) Sînt divizibile cu 3;
b) Au cifra unităților egală cu un sfert din cifra sutelor.

*Ion Z. Predescu*, profesor, Rast, Dolj

### Clasa a VI-a

**E : 9713.** Să se determine toate pătratele perfecte care se scriu în baza 10 cu patru cifre pare, distincte două cîte două.

*Daniel Cojocaru*, profesor, Slatina

**E : 9714*.** Arătați că oricare ar fi un număr natural $n \geq 2$, există o infinitate de numere naturale care au exact $n$ divizori naturali.

*Lavinia Savu*, elevă, București

**E : 9715.** Un metrou pleacă dintr-o stație cu 80 km/h spre altă stație. Peste 1 minut, pleacă din ecalaltă stație, în sens contrar primului



Scanned with OKEN Scanner

metrou, un altul cu viteza de 90 km/h. Ele se întîlnesc după 2 minute de la plecarea ultimului metrou. Ce distanță este între cele două stații?

*Ionuț Sârbu*, elev, Bacău

**E : 9716*.** Se consideră un triunghi $ABC$ și $M$ un punct pe înălțimea din vîrful $A$, $M \neq A$. Fie $N$ simetricul lui $M$ față de $AC$ și $P$ simetricul lui $N$ față de înălțimea considerată. Să se demonstreze că triunghiul $ABC$ este isoscel (cu $AB \equiv AC$) dacă și numai dacă $P$ este simetricul lui $M$ față de $AB$.

*Sermin Pîrnac*, profesor, Clănița, Teleorman

**E : 9717.** Suma mai multor numere naturale impare consecutive este 29800. Să se afle ultimul termen al acestei sume, știind că diferența dintre acesta și primul termen este 198.

*Maria Vizuroiu, Nicolae Vizuroiu*, profesori, Pitești

**E : 9718*.** Dîndu-se triunghiul isoscel $ABC$ ($AB \equiv AC$) se prelungește latura $BC$ cu segmentul $BD \equiv BC$. Se ridică în $B$ perpendiculara $BE$ pe dreapta $CD$ ($E \in AD$). Să se arate că unghiurile $\widehat{BAD}$ și $\widehat{ECA}$ sînt congruente.

*Tudor I. Băetica*, Izbiceni, Olt

## Clasa a VII-a

**E : 9719*.** Se consideră numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_{1988}$, astfel încît $2 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{1988}$. Să se demonstreze că:

$$\left(1-\frac{1}{a_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{a_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_{1988}^2}\right) > \frac{1}{1989}.$$

*Petre Năchilă*, profesor, Ploiești

**E : 9720.** Să se arate că dacă numerele întregi $a, b, c$ verifică relația $a^2 + 5b^2 + 10c^2 + 16d^2 = 4ab + 6bc + 8cd$, atunci $a^2 - d^2$ se divide cu 23.

*Aneta Setelecan*, profesoară, București

**E : 9721*.** Știind că un poligon convex are 135 diagonale și că măsurile în grade ale unghiurilor sale sînt exprimate prin numere naturale impare consecutive, să se afle numărul laturilor poligonului și măsura celui mai mic unghi al acestuia.

*Gh. Nedelea*, profesor, Pitești

**E : 9722.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{xy + x + y + 1}{x + y + 2} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{xy + x + y + 1}{x - y} = -6. \end{cases}$$

*Dragoș Constantinescu*, profesor, Rm. Vîlcea



Scanned with OKEN Scanner

**E : 9723.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic cu $\hat{A} = 90°$. Arătați că dacă $4AB = 3BC$, atunci $45° < C < 60°$.

* * *

**E : 9724*.** Se dau binoamele : $2x - 1$ ; $-x + 5$ ; $3x - 3$. Să se afle :

a) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$, binoamele date pot fi lungimile laturilor unui triunghi ?

b) Între ce limite pot varia lungimile laturilor acelui triunghi ?

c) Să se reprezinte grafic variația lungimilor laturilor triunghiului în funcție de $x$ în același sistem de coordonate și să se arate că cele trei grafice au un punct comun. Ce fel de triunghi corespunde valorii lui $x$ care este abscisa punctului comun celor trei grafice ?

d) Pentru ce valori naturale ale lui $x$, triunghiul are perimetrul maxim ?

*Mihai Gârtan*, profesor, Iași

## Clasa a VIII-a

**E : 9725*.** Fie $VABCD$ o piramidă având ca bază trapezul dreptunghic $ABCD$ cu unghiurile drepte în $A$ și $D$ și cu proprietatea că vîrful $V$ se proiectează pe bază în punctul $N$ de intersecție a mediatoarei lui $BC$ cu latura $AD$ a trapezului. Să se arate că planele $(VNC)$ și $(VNB)$ sînt perpendiculare dacă și numai dacă $AD = AB + CD$.

*Florența-Rodica Loga*, profesoară, Vinerea, Alba

**E : 9726.** Se dau polinoamele :

$P(X) = n \cdot X^n + (n-1) \cdot X^{n-1} + \ldots + X$ și

$Q(X) = 3 \cdot X^3 + X^2 - 4X + 9$, unde $n$ este număr natural nenul.

Prin împărțirea lui $P(X)$ și $Q(X)$ la un același polinom $I(X)$ se obțin resturile $3X - 5$, respectiv $5 - 3X$. Aflați polinomul $I(X)$, știind că suma coeficienților lui $P(X)$ este 6.

*Gheorghe Nedelea*, profesor, Pitești

**E : 9727*.** Există o piramidă $VABCD$ în care să avem baza $ABCD$ un romb de latură $a$, $VA = VB = VC = a$, iar unghiul $\widehat{BAD}$ de măsură 60° ?

*Dragoș Pătroi*, elev, Pitești

**E : 9728.** Arătați că pentru fiecare $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, există $n \in \mathbb{Z}$, astfel încît graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -mx + n$, să conțină punctul de intersecție al dreptelor date de ecuațiile $x + y = m$ și $x + my = n$.

*Damian Marinescu*, profesor, Tîrgoviște



Scanned with OKEN Scanner

E : 9729*. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in (0, +\infty)$ și

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}=\frac{6}{\sqrt{abcd}},$$

atunci $a = b = c = d$.

*Dragoș Pătrei*, elev, Pitești

E : 9730. Fie $P$ un polinom cu coeficienți reali astfel încît $P(X-3) = X^3 + 2X^2 - 96$. Să se arate că $X - 1$ divide $P(X)$.

*Ion Brînzan*, profesor, Craiova

## PROBLEME PENTRU LICEU

### Clasa a IX-a

21765*. Se consideră o funcție monotonă $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ există $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{m \text{ ori}}(n) = n$.

Să se arate că $f = 1_{\mathbf{N}^*}$.

*Alin Pop*, profesor, Năsăud

21766. Fie un triunghi $ABC$, $M$ mijlocul laturi $[AC]$ și un punct $N$ pe latura $[BC]$ astfel încît $\frac{NB}{NC} = k$, $k \geq 0$. Demonstrați că dreapta $MN$ este mediatoarea laturii $[AC]$ dacă și numai dacă $a \geq c$ și $k = \frac{a^2 - c^2}{b^2}$.

*I. Safta*, profesor, Pitești

21767*. Să se calculeze suma

$$\left[\frac{2^n+1}{2^{n-1}+1}\right]+\left[\frac{3^n+1}{3^{n-1}+1}\right]+\ldots+\left[\frac{k^n+1}{k^{n-1}+1}\right],$$

unde $k, n \in \mathbf{N}$, $k, n \geq 2$, iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$.

*Mugurel Szörös*, elev, Drobeta-Turnu Severin

21768. Fie triunghiul isoscel $ABC$ ($AB = AC$) cu $m(\widehat{BAC}) = 20°$ și punctul $D$ pe latura $[AB]$ astfel ca $AD = BC$. Să se determine $m(\widehat{BDC})$.

*Alin Pop*, profesor, Năsăud și *Nicolae Stoia*, matem., București

21769*. Să se construiască un triunghi $ABC$ știind că lungimea laturii $BC$ este egală cu $a$, iar ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$ se află pe o dreaptă paralelă cu dreapta $BC$ la distanța $\alpha$ de dreapta $BC$. Discuție.

*Dan Grigorescu*, profesor, București



Scanned with OKEN Scanner

**21770.** Fie o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(f(x)) = 3x + 2$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că $f$ este bijectivă.

*Dragoș Pătroi*, elev, Pitești

**21771.** Considerăm un triunghi oarecare $ABC$ și punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ astfel încît $\frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MB} = k$. Fie $M'$ simetricul lui $M$ față de $A$ și $N'$ simetricul lui $N$ față de $B$.

Notăm $\{M''\} = M'N \cap (BC)$ și $\{N''\} = N'M \cap (AC)$. Se cere:

a) Să se arate că $MN' > MN''$ și $NM' > NM''$;

b) Să se determine valorile lui $k$ astfel încît patrulaterul $BN''CN'$ sau patrulaterul $AM''CM'$ să fie trapez.

*Doru P. Firu*, profesor, Orșova

## Clasa a X-a

**21772.** Fie $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \frac{2^x(2^x + a - 1)}{4^x - 2^{x+1} + 2}$, unde $a \in \mathbf{R}$.

Să se arate că funcția $f$ este inversabilă și să se determine funcția inversă.

*Petre Năchilă*, profesor, Ploiești

**21773.** Să se rezolve în $Z \times Z$ ecuația

$$x(x - 1) + y(y + 3) = 10.$$

*C. Ionescu-Țiu*

**21774*.** Fie $a, b \in \mathbf{Q}$ cu $\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} \in \mathbf{Q}^*$. Să se arate că $\sqrt[5]{a}$ și $\sqrt[5]{b}$ sînt numere raționale.

*Vladimir Marina*, profesor, Voluntari, București

**21775*.** 1). Să se arate că, dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, atunci $m = \frac{5^{n-1} - 1}{2}$ este un număr natural cu mai puțin de $n$ cifre în baza 10;

2) Dacă pentru $n \in \mathbf{N}^*$ notăm cu $a_n$ numărul cifrelor lui $n$ în baza 10, să se arate că oricare ar fi $p \in \mathbf{N}^*$, $p \leq a_n$, există $n_p \in \mathbf{N}$ astfel încît $a_n - a_{n_p} = p$.

*Ionel Tudor* și *Ion Avramescu*, profesori, Călugăreni, Giurgiu

**21776.** Fie $a, b \in (0, \infty)$. Demonstrați că $a, b \in (1, +\infty)$ dacă și numai dacă există un număr $c > 1$ astfel încît

$$a^c > b \text{ și } b^c > a. \tag{1}$$

*Vasile Berinde*, matematician, Baia Mare

**21777*.** Să se arate că dacă într-un triunghi $ABC$ există un punct $D \in (BC)$ astfel încît $AD^2 = BD \cdot CD + \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$, atunci $AD$ este mediană sau înălțime.

*Florin Rotaru*, matematician, Focșani



Scanned with OKEN Scanner

**21778.** Să se arate că pentru $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea

$$(\sin^2 \alpha)^{\frac{1}{\sin^2\alpha}} \cdot (\cos^2 \alpha)^{\frac{1}{\cos^2\alpha}} < \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{\sin^2 2\alpha}}.$$

*Lucian Buliga*, profesor, Focşani

## Clasa a XI-a

**21779*.** Să se determine numerele naturale $n$ cu proprietatea că determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n+1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1} \end{vmatrix}$$

este un număr întreg.

*Cristian Moanţă*, student, Craiova

**21780*.** Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ care îndeplineşte condiţiile $x_1 \in (0, 2)$ şi $1-(x_n-1)^{n+1} \leq x_{n+1} \leq 1+(x_n-1)^{n+1}$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Să se arate că şirul este convergent şi să i se afle limita.

*Gh. Fătu*, profesor, Baia Mare

**21781.** Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ unde

$$a_n = \frac{C_{2n+1}^3 + 2C_{2n+1}^5 + \dots + nC_{2n+1}^{2n+1}}{C_{2n+1}^2 + 2C_{2n+1}^4 + \dots + nC_{2n+1}^{2n}},\ (\forall)\ n \geq 1, \text{ iar}$$

$$b_n = a_n^{n^\alpha},\ (\forall)\ n \geq 1, \text{ cu } \alpha \text{ real fixat.}$$

Să se arate că, pentru orice $\alpha$ real, şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să i se calculeze limita.

*Ionel Tudor*, profesor, Călugăreni, Giurgiu

**21782.** Să se demonstreze că pentru orice $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu $a < b$, are loc inegalitatea: $\frac{b-a}{\operatorname{tg} b} < \ln(\sin b) - \ln(\sin a) < \frac{b-a}{\operatorname{tg} a}$.

*Alexandru Constantinescu*, inginer, Bucureşti



Scanned with OKEN Scanner

**21783.** Să se arate că ecuația $2x^3 - 5x^2 + 2{,}5x + 0{,}4 = 0$ are toate rădăcinile reale.

*Vasile Zidaru*, profesor, Sf. Gheorghe

**21784*.** Să se explicitezе funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left( \left[ \frac{x + 3^{k-1}}{3^k} \right] + \left[ \frac{x + 2 \cdot 3^{-1}}{3^k} \right] \right).$$

*D. M. Bătineţu-Giurgiu*, profesor, Bucureşti

**21785.** Fie $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ şi $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Considerăm matricea :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^x & 0 & 2 - a^x & 0 \\ 0 & a^x & 0 & 2 - a^x \\ 2 - a^x & 0 & a^x & 0 \\ 0 & 2 - a^x & 0 & a^x \end{pmatrix}.$$

Să se determine matricea $A^n$, pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

*I. Bedeleanu*, profesor, Constanţa

## Clasa a XII-a

**21786.** Să se calculeze $\int_{-a}^{a} |x^4 - 5x^2 + 6| \, dx$, unde $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$.

Discuţie.

*Liviu Pîrşan*

**21787.** Să se determine toate polinoamele unitare $P \in \mathbf{C}[X]$ cu proprietatea că $|P(x)| = 1$, $(\forall) x \in \mathbf{C}$ cu $|x| = 1$.

*Patrick Popescu-Pampu*, elev, Bucureşti

**21788*.** Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată de :

$$f(x) = \begin{cases} P(x) \cdot \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

unde $P(x)$ este o funcţie polinomială cu coeficienţi reali, are proprietatea lui *Darboux*.

*Sorin Răducanu*, student, Craiova

**21789.** Se consideră inelul de matrici pătratice (faţă de adunarea şi înmulţirea uzuală a matricilor) :

$$A_r = \left\{ \begin{pmatrix} a & rc & rb \\ b & a & rc \\ c & b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbf{Q} \right\}$$

unde $r \in \mathbf{Q}$.

a) Să se demonstreze că inelele $A_r$ şi $A_0$ sînt izomorfe dacă şi numai dacă $r = 0$;

b) Să se demonstreze că inelul $A_r$ este izomorf cu inelul produs direct $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}(i\sqrt{3})$ dacă şi numai dacă există $s \in \mathbf{Q}^*$ astfel încît $r = s^3$.

*Toma Albu*, Bucureşti



Scanned with OKEN Scanner

21790*. Fie $a > 0$. Să se determine cea mai mare valoare $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care $\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^2 \geq \lambda \int_0^a f^3(t)\,dt$, oricare ar fi funcția $f : [0, a] \to [0, +\infty)$ derivabilă, cu $f'(x) \leq 1$, $(\forall)x \in [0, a]$.

*Marcel Chiriță*, profesor, București

21791*. Fie $G$ un grup multiplicativ cu proprietatea că aplicațiile $x \to x^3$ și $x \to x^{1888}$ sînt endomorfisme ale lui $G$. Să se demonstreze că $G$ este abelian.

*Titu Andreescu*, profesor, Timișoara

21792. Calculați derivatele următoarelor funcții:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$; b) $G(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{(1-t)^3}\,dt$.

* * *

## PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O : 584. Fie $n \geq 3$ un număr natural și $S_n$ mulțimea permutărilor a $n$ elemente. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \text{ pară}}} \left(\sum_{i=1}^{n} |i - \sigma(i)|\right) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \text{ impară}}} \left(\sum_{i=1}^{n} |i - \sigma(i)|\right).$$

*Nicolae Popescu* și *Tiberiu Spircu*

O : 585. Să se determine suprafețele triunghiulare de arie 2 care conțin un pătrat de latură 1.

*Florin Vulpescu-Jalea*, profesor, București

O : 586. Notăm cu $N(R)$ numărul tripletelor $(p, q, r)$, unde $p, q, r$ sînt numere întregi și $p^2 + q^2 + r^2 \leq R^2$. Să se demonstreze că $\lim_{R \to \infty} \frac{N(R)}{R^3} = \frac{4\pi}{3}$.

*Gh. Siretchi*

## CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

### Clasele a VII-a și a VIII-a

C : 893. Se consideră triunghiurile ascuțitunghice $A_1A_2A_3$ și $A_1'A_2'A_3'$ și punctele $M$, $M'$ situate în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$, respectiv în interiorul triunghiului $A_1'A_2'A_3'$. Notăm cu $v_i$ distanța lui $M$ la vîrful $A_i$ și cu $l_i$ distanța lui $M$ la latura opusă vîrfului $A_i$, $i = 1, 2, 3$ și analog considerăm numerele $v_i'$, $l_i'$, $i = 1, 2, 3$.

a) Să se demonstreze că dacă $v_i = v_i'$ și $l_i = l_i'$, pentru $i = 1, 2, 3$, atunci $\Delta A_1A_2A_3 \equiv \Delta A_1'A_2'A_3'$.



Scanned with OKEN Scanner

b) Dați exemple de triunghiuri necongruente $A_1A_2A_3$ și $A'_1A'_2A'_3$ și de puncte interioare $M$, respectiv $M'$, pentru care este îndeplinită una din condițiile $r_i = r'_i$, $i = 1, 2, 3$ sau $l_i = l'_i$, $i = 1, 2, 3$.

*Marcel Țena*

**C : 894.** Să se determine toate numerele reale $m$ astfel încît ecuația cu necunoscuta $x$

$$\frac{x}{m} + \frac{4-m}{2m} + \frac{m-8}{x} = 0,$$

să admită două rădăcini numere întregi.

* * *

**C : 895.** Să se determine toate numerele întregi $x$ pentru care numărul $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5$ este pătratul unui număr întreg.

* * *

**C : 896.** Se consideră mulțimile

$$A = \{3p + 1 \mid p \in \mathbb{N}\},\ B = \{5k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Cîte numere naturale din intervalul [1000, 2000] aparțin mulțimii $A \cap B$?

*Liviu Pîrșan*

## Clasele a IX-a și a X-a

**C : 897.** a) Să se demonstreze că pentru oricare trei funcții $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avem

$$(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f.$$

b) Să se determine funcțiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că pentru oricare două funcții $g, h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ avem $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

*Marcel Țena*

**C : 898.** Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris triunghiului $ABC$, $P$ un punct în interiorul sau pe laturile triunghiului, iar $A_1$, $B_1$, $C_1$ punctele în care dreptele $PA$, $PB$, $PC$ intersectează laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Să se arate că :

a) $$\frac{PA_1}{AA_1} \cdot PA^2 + \frac{PB_1}{BB_1} \cdot PB^2 + \frac{PC_1}{CC_1} \cdot PC^2 = R^2 - OP^2;$$

b) $$\frac{PA^3}{AA_1} + \frac{PB^3}{BB_1} + \frac{PC^3}{CC_1} = 4MP^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - R^2}{4},$$

unde $a, b, c$ sînt lungimile laturilor triunghiului $ABC$, iar $M$ punctul situat pe segmentul $(OG)$, astfel încît $OM = 3MG$ ($G$ fiind centrul de greutate al triunghiului $ABC$).

*V. Cîrtoaje*, Ploiești

**C : 899.** Fie $k, n, p \in \mathbb{N}^*$ cu $n \geqslant p + k$ și $k \geqslant p$. Să se demonstreze identitatea :

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i C_{n-i}^k = C_{n-p}^{k-p}.$$

*Sabin Tăbîrcă*, matematician, Rm. Vîlcea



Scanned with OKEN Scanner

**C : 900.** Fie $x_1, x_2, x_3$ rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 - 2x + 4 = 0$ $|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3|$. Să se determine un polinom $f \in \mathbf{Z}[X]$ de grad minim care are ca rădăcină numărul $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

*L. Panaitopol*

## Clasele a XI-a și a XII-a

**C : 901.** Pentru o submulțime nevidă $\mathcal{M}$ a inelului $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, considerăm proprietățile :

a) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A + B \in \mathcal{M}$;

b) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cdot B \in \mathcal{M}$;

c) $A^2 \in \mathcal{M} \Rightarrow A \in \mathcal{M}$;

d) $O_2 \in \mathcal{M}$;

e) $I_2 \in \mathcal{M}$.

Să se demonstreze că :

1) Dacă $\mathcal{M}$ satisface proprietățile a), c) și d), atunci $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$;

2) Să se dea exemple de o submulțime strictă $\mathcal{M}$ a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ care satisface proprietățile a) și c);

3) Să se dea exemplu de o submulțime strictă $\mathcal{M}$ a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ care satisface proprietățile b), c), d) și e).

*C. Voica*, București

**C : 902.** Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} A \sin\left(\dfrac{\alpha}{x} + \varphi\right), & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

unde $A > 0$, $\varphi \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

a) Să se demonstreze că $f$ are proprietatea lui *Darboux* dacă și numai dacă $a \in [-A, A]$.

b) Analog pentru funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} A \cos\left(\dfrac{\alpha}{x} + \varphi\right), & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

*Ileana-Simona Pascu*, profesoară, București

**C : 903.** Se consideră inelul de matrici pătratice (față de operațiile cu matrici)

$$B_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & nc & nb \\ b & a & nc \\ c & b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbf{Z} \right\}, \text{ unde } n \in \mathbf{Z}.$$

Să se demonstreze că :

a) $B_n$ este comutativ;

b) $B_n$ are elemente nilpotente nenule dacă și numai dacă $n = 0$;

c) $B_n$ este domeniu de integritate dacă și numai dacă $n$ nu este cub perfect în $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$;

d) $B_n$ nu este corp.

*Toma Albu*, București



Scanned with OKEN Scanner

**C: 904.** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}-\sqrt[n]{(2n-1)!!})$ unde $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)$, $(\forall)\ n\in \mathbf{N}^*$.

*D. M. Bătineţu-Giurgiu*, profesor, Bucureşti

## PROBLEME DE INFORMATICĂ

**I: 347.** Se consideră funcţia $f: \mathbf{N}\setminus\{0,1\}\to\mathbf{N}$, $f(n)=n-p_{\pi(n)}$, unde $p_k$ reprezintă al $k$-lea număr prim, iar $\pi(k)$ reprezintă numărul numerelor prime $\leqslant k$. Fiind dat un număr $N$, să se elaboreze un program care să determine $\max_{2\leqslant n\leqslant N} f(n)$ şi numerele $n$ pentru care se realizează acest maxim.

*Daniel Lesnic*, student, Bucureşti

**I: 348.** Să se determine funcţia realizată de următorul program BASIC:

```
10 INP "N =": N: DIM V (500)
20 FOR I = 1 TO N: INP V(I): NEXT I
30 M = O: FOR I = 1 TO N-1: IF V(I) = V(I + 1) GO TO 50
40 M = 1: T = V(I): V(I) = V(I + 1) : V(I+1) = T
50 NEXT I: IF M = 1 GO TO 30
60 FOR I = 1 TO N: PRI V(I); " "; : NEXT I: PRI
70 STOP
```

*Silviu Stössel*, profesor, Bucureşti

**I: 349.** Să se determine funcţia realizată de următorul program BASIC:

```
10 INPUT "N =" ; N: INPUT "M =": M: D = ABS(N): I = ABS(M)
20 C = INT(D/I): R = D-C *I: IF R = O GO TO 40
30 D = I: I = R: GO TO 20
40 PRINT "NOTAŢI REZULTATUL 1"; : FOR K = 2 TO I
50 J = INT(I/K): T = I - J * K: IF T = O THEN PRINT ".": K;
60 NEXT K: PRINT " ": STOP
```

*Silviu Stössel*, profesor, Bucureşti

## RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

**ADJUD** (VRANCEA) Ş.g. 1 cl. IV Antonescu Ştefan (30); Ş.g. 3 cl. VII Buţan Mariana (50), Sachelarie Mihaela (90). **AGÎRBICIU** (SIBIU) Ş.g. cl. V Costea Aneta (176), Lepădat Anca (138). **AIUD** (ALBA) Ş.g. 1 cl. V Iosivian Raluca (73), cl. VII Părălan Andreea (244); Lic. ind. 1 cl. IX Marcovici Adriana (108). **ALBA-IULIA** (ALBA) Ş.g. 1 cl. VI Popa Andreea (75), Sandru Delia (90); Ş.g. 2 cl. V Anca Maria (88); Ş.g. 7 cl. V Şerbu Simona (74), cl. VI Indolean Bianca (90), Indolean Camelia (90), Nanu Andrei (73), Păun Cristian (84), Şerbu Marilena (100); Ş.g. 8 cl. VIII Duca Camelia (55); Lic. mat. fiz. „Horia, Cloşca şi Crişan" cl. IX Berinde Ştefan (410), Bolog Andrada (92), Dan Roxana (96), Ilie Cosmin (110), Mocanu Daniela (89), Mureşan Ioan (110), Voina Mihaela (153). **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) Ş.g. cl. V Badea Florentin (100), Florescu Liliana (112), Ivaşcu Mioara (89), cl. VII Gitoi Adrian (101), Nelu Isabela (219); Ş.g. 3 cl. V Berceanu Adriana (100), Berceanu Florina (120), Săndulescu Ciprian (70), cl. VI Baciu Oana (179), Suna Carmen (172), Tălpeanu Silvia (130), Vlad Claudia (197), cl. VII Calmuschi A. (70), Căldăraru Luigi (69), Ionescu Alina (106), Musceleanu Adrian (59), Şerbănescu Liviu (90). **ARAD** (ARAD) Ş.g. 5 cl. II Neghina Călin (70); Ş.g. 7 cl. VIII Gheţa Alina (11); Ş.g. 13 cl. VI Sandor Sorin (33); Ş.g. 18 cl. VI Neacşu Olanda (116); Ş.g. 22 cl. V Lebanov Mihaela (90), cl. VII Feieş Ioana (56); Lic. ind. 12 cl. VI Ciupan Livia (75), Lucuţa Alina (56), Negrei Andromeda (70).

**BACĂU** (BACĂU) Ş.g. 2 cl. II Capaţ Alexandru (78); Ş.g. 4 cl. VI Butcaru Ana (117); Ş.g. 6 cl. V Stingaciu Liliana (78); Ş.g. 15 cl. VII Asaftei Laura (79); Ş.g. 18 cl. VI Acrişmăriţei Laura (88), Aprodu Marius (89), Buftea Emilia (100), Despinescu Adelina (130), Dumitru Simona (60), Niţă Cătălina (115), Pintilei Silviu (100), Podoiu Silviu (94), Radu Ana Cristiana (90), Radu Silvia Mihaela (100), Rusu Ionuţ (140), cl. VII Aramă Codrin



Scanned with OKEN Scanner

(167), Guțu Cristina (76), Huștiu Bogdan (110), Onciu Roxana (72), Rachieru Radu (200), Sava Clement (80), Spătaru Iulian Viorel (98), Strugariu Georgiana (110), Tindeche Oana Ancuța (118); fără mențiune de clasă: Iancu Anca (120), Poraicu Corina (137); Ș.g. 19 cl. III Budău Anca-Nicoleta (217), Chiper Alexandra (293), Dirlău Iulian (300), Ghervan Cătălin (150), Hriscu Simona (200), Măgirescu Răzvan (70), Mihoc Elena (287), Suhani Mihaela (300), Ungureanu Mihaela (96), cl. IV Grigore Anca Andreea (320), Onofrei Ioana (40), cl. V Blănaru Oana (39), Uricaru Mihaela (60), cl. VI Godeanu Ioana (80), cl. VII Corneliac Andrei (60), Voinea Luiza (100); Ș.g. 28 cl. VIII Berdila Cristian (90); Ș.g. 30 cl. VIII Peter Mihaela (20); Lic. „G. Bacovia" cl. IX Cuiche Adrian (50). **BAIA MARE** (MARAMUREȘ) Ș.g. 4 cl. VII Peter Horațiu Călin (90); Ș.g. 14 cl. VII Vasiliu Cornelia-Elisabeta (105); Ș.g. 19 cl. V Oșian Mihai (88), Sitar Ramona (79); Lic. ind. 8 cl. VI Barna Alice (70), Zaharia Ovidiu (140); fără mențiune de școală; cl. VI Dan Alina (50). **BĂILE HERCULANE** (CARAȘ-SEVERIN) fără mențiune de școală: cl. VIII Boldea Marius-Valentin (110). **BĂILEȘTI** (DOLJ) Ș.g. 1 cl. V Crăciunoiu Alina (451), Știrbu Cătălin (125), cl. VII Cristea Cătălin (85), cl. VIII Ungureanu Traian-Adrian (130). **BAIȚA** (HUNEDOARA) Ș.g. cl. V Dobra Iovan (51). **BEIU** (TELEORMAN) Ș.g. cl. VII Gălețeanu Violeta (117). **BEIUȘ** (BIHOR) Ș.g. cl. VI Negrea Adrian (39). **BINIȘ** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cl. V Stan Ionela (143). **BLAJ** (ALBA) Ș.g. 1 cl. VI Toader Cristina (60). **BOTOȘANI** (BOTOȘANI) Ș.g. 7 cl. V Chirilă Irina (80), Finașu Teodora (80), cl. VI Cărăușu Eugen (110), Georgescu Oana (95), Ilișescu Irina Ioana (95), cl. VIII Apetrei Gabriel (159); Ș.g. 12 cl. III Tătăringă Geanina (75), cl. IV Apetrei Ciprian (205), cl. V Ștefanache Simona Mariana (110), cl. VI Ciomaga Bogdan (174), Darea Daniela (80), Larco Ciprian (107), Moga Monica (97), Moraru Camelia (79), Pricopi Teodor (248), cl. VIII Anechiței Ovidiu Liviu (55), Coroi Claudiu (100); fără mențiune de clasă: Mihalache Sebastian (70), Pocol Cătălin (58); Ș.g. 13 cl. IV Crețu Cristina (90), cl. V Andronachi Alin (90), Aursulesei Augustin (90), Axani Gabriela (90), Breșug Ștefan (40), Brumă Bogdan (79), Butnaru Simona Anișoara (70), Cervicescu Mihaela (46), Chirilă Irina (90), Crețu Anca Nicoleta (75), Havriliuc Marius (75), Hoancă Ioan (110), Honciuc Alina (75), Onțanu Carmen (85), Sacu Oana Mădălina (80), Sandu Lucian (78), Spiridon Geanina Nicoleta (80), Vasilică Mihaela Viorica (78), cl. VI Amurăriței Marius (110), Chirica Adrian Viorel (110), Costrăș Monica (110), Cușmir Iulian Vasile (100), Hușman Daniela Carmen (90), Jijie Alina (110), Matei Cătălina (120), Motraș Luiza (110), Onofrei Brindușa (95), Piriu Paul (103), Portariuc Carmen (97), Rita Ionela (100), Terchia Diana (95), Ticalo Ștefan (97), Vlașcu Dragoș (210); fără mențiune de clasă: Bucătar Diana Elena (90), Francu Daniela (68), Obadă Iuliana (100), Racu Ana Maria (87), Tamaș Maria Luisa (100), Tudor Iuliana (91); Ș.g. 14 cl. V Afrăsinei Mihai (140), Călin Anca Elena (170), Mitoșeru Daniela (180), **BOZOVICI** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cl. VI Bololoi Marius (60). **BRAGADIRU** (TELEORMAN) Ș.g. 1 cl. VII Mitroi Livia Rozica (40). **BRAȘOV** (BRAȘOV) Ș.g. 5 cl. III Stoenescu Radu (140), cl. VIII Chișu Corina (70), Dragomir Mariana (70), Segărceanu Octavian (130), Soresecu Octavian (63), Suciu Claudia (70); Ș.g. 8 cl. V Țiucă Nicoleta (20); Ș.g. 12 cl. VIII Dima Lucian (176); Ș.g. 27 cl. V Chima Nicoleta (261), Corboș Anca (249), David Andreea (109), Dragomirescu Andreea (170), Foșlui Florina (168), Moroiu Laura (194), Radu Gabriel (173), Salbiniță Raluca (206), Suvei Marius (70), cl. VI Botea Veronica (90), Cîrlea Raluca (30), Dan Cristina (50), Dumitru Laura (90), Istrate Daniela (23), Niculescu Adina (40), Pop Adrian (140), Procop Cătălin (60), Stoicanea Magdalena (50), Tocitu Diana (20), Tudor Remus (70), cl. VII Bolat Camelia Simona (140), Boriceanu Vicențiu (100), Burlacu Ioana (120), Cazacu Aurelia (75), Chitea Ruxandra (276), Culai Ana-Maria (140), Marin Violeta (180), Mocanu Andreea (107), Ștefan Iulian Petru (160), Ștefan Veronica (151), cl. VIII Bucurenciu Daniel (80), Ciuclaru Elena (72); fără mențiune de clasă; Ilie Elena Claudia (163); Ș.g. 29 cl. V Sima Oana (110); Lic. ped. cl. VII Voina Liana (110); fără mențiune de școală: cl VI Boboc Adriana (39), Cojocaru Cristina (26), cl. VII Ghițu Daniela (38). **BRATCA** (BIHOR) Ș.g. cl. V Pali Doru (73). **BRĂILA** (BRĂILA) Ș.g. 7 cl. VI Ciurea Ionuț (155); Ș.g. 12 cl. V Filoti Ciprian (40); Ș.g. 18 cl. VII Cauteș Cătălin (90); Ș.g. 22 cl. V Boldeanu Olimpia (85), Croitoru Daniela (97), Iorga Marinela (94), Uță Ionela (96), cl. VI Anghel Georgeta (100), Bărbieru Florentina (96), Buzatu Lili Alina (158), Fătu Gheorghe Viorel (155), Gheorghe Liliana Rozalia (274), Gurău Florian (142), Iancu Sorin Claudiu (261), Ioniță Aida (256), Manolache Micu (158), Mihăilă Silvioara Paula (274), Neculai Carmen Violeta (264), Nica Stănica (168), Pătrașcu Lucia (100), Rusu Alina (138), Tănase Adrian (68), Untea Gilbert (100), Vilcu Steluța Florentina (102), Vlad Steluța Simona (271); Ș.g. 23 cl. V Cochino Emil Andrei (100), Costea Rodica (100), cl. VII Urdă Silviu Valentin (30); Ș.g. 27 cl. VIII Popescu Ionel (10); Ș.g. 29 cl. VI Petrencu Cătălin (100), cl. VIII Doroftei Dragoș (50); fără mențiune de clasă: Albu Simona (133); Ș.g. 31 cl. VI Pătrașcu Roxana (120); Lic. „N. Bălcescu" cl. IX Costin Daniela (144); Lic. ind. „Progresul" cl. XII Diordue Viorel (250); fără mențiune de școală: cl. V Jipa Lenuța (100); fără mențiune de clasă și școală: Pătrașcu Mihaela (10).

**BUCUREȘTI** Ș.g. 1 Badea Bogdan (40); Ș.g. 3 cl. VI Palade Horia (30); Ș.g. 7 cl. VI Cocor Andrei (120); Ș.g. 11 cl. IV Pascu Oana (66), Ș.g. 11 cl. IV Albu Andrei Tudor (140),



Scanned with OKEN Scanner

Berbely Albert (160), Dumitrache Mihaela (100), Lăscuțoiu Andra (130), Ioniță Mihaela (300), Mihoci Alexandra (130), Pascu Tudor (150), Terzian Irina (120), Tudoran Ruxandra (130); Ș.g. 12 cl. IV Toma Elena (270), cl. VI Toma Mihai (260); Ș.g. 13 cl. V Negreț Alexandru (120); Ș.g. 51 cl. VI Lemeni Daniel (260); Ș.g. 53 cl. III Șerban Ramona Ruxandra (67), cl. VI Belciu Sorana (90), Ș.g. 62 cl. V Constantin Adela (100); Ș.g. 70 cl. V Pașc Andreea (156), cl. VII Nica Narcis Iulian (100); Ș.g. 88 cl. VIII Lazăr George (100); Ș.g. 94 cl. V Ruse Maria Carmen (240); Ș.g. 101 cl. III Silvan Laura Oana (98); Ș.g. 116 cl. VIII Hossu Tiberiu (100); Ș.g. 131 cl. V Gegiu Aniela (286); Ș.g. 154 cl. VII Eremenco Cristina (228); Ș.g. 156 cl. V Căzănaru Mihaela (48), Matelanu Vlăduț (74), Osnaga Silvia Monica (227), Rucăreanu Marius Cătălin (73), cl. VII Despa Gabriel (95), Romanovschi A. (80); Ș.g. 163 cl. VIII Căpităneanu Simona (50); Ș.g. 168 cl. V Niță Irina (110), Poșcaș Adrian (137); Ș.g. 172 cl. VI Constantin Mădălina (98); Ș.g. 174 cl. VII Gheorghiu Adina (100); fără mențiune de clasă: Munteanu Dorinela (27), Nicolae Anda (70); Ș.g. 189 cl. VI Stroe Ionel Daniel (80); Ș.g. 190 cl. VII Penescu Bogdan (41), cl. VIII Drăguș Andi (170); Ș.g. 193 cl. V Roșu Marius Adrian (255); Ș.g. 194 cl. VI Radu Octavian (71); Ș.g. 199 cl. VII Vechler Eduard (100); Ș.g. 206 cl. VI Roșu Ion (71); Lic. mat. fiz. 1 cl. IX Petroff Mihai (45); Lic. mat. fiz. 3 cl. IX Jora Șerban (69); Lic fil. ist. „Z. Kosmodemianskaia" cl. V Brandibur Roxana (219); Lic. ind. 34 cl. V Murgan Tudor (400); fără mențiune de școală: cl. VIII Luca Mihnea Paul (53); fără mențiune de clasă și școală: Perahe Tatiana (42); BUDA (VRANCEA) Ș.g. cl. IV Ionașcu Silviu (188), cl. VII Ionașcu Theodor (141), cl. VIII Ionașcu Lidia (200). BUHUȘI (BACĂU) Ș.g. 2 cl. III Maxim Ioan Marius (50). BUZĂU (BUZĂU) Ș.g. 5 cl. VII Ivancea Alina (77); Ș.g. 11 cl. V Georgescu Lidia (70), cl. VII Mîroiu Liviu (80); Ș.g. 16 cl. VII Popescu Nicoleta Marinela (10).

CALAFAT (DOLJ) Ș.g. 1 cl. VI Pîrvu Adrian (122). CARACAL (OLT) Ș.g. 7 cl. VI Ioniță Dana Simona (140). CARANSEBEȘ (CARAȘ SEVERIN) Ș.g. 8 cl. V Demeter René (90), Lungu Monica (112), Oprea Adriana (85), cl. VI Margină Oana (98), Surulescu Silvia (114); Lic ped. cl. VI Ranczel Diana (70), cl. VII Muntean Mihaela (81). CĂLĂRAȘI (CĂLĂRAȘI) Ș.g. 1 cl. V Dorobanțu Cătălin (179); Ș.g. 5 cl. VII Dumitrescu Andi (92). CĂȘEIU (CLUJ) Ș.g. cl. VII Boldor Loredana Paula (110), Grosan Daniel Claudiu (104). CEHU SILVANIEI (SĂLAJ) Ș.g. cl. II Pop Cristina (70), cl. III Porcan Cosmin (170). CEICA (BIHOR) Ș.g. cl. IV Sidea Anca (414). CERNAVODĂ (CONSTANȚA) Ș.g. 2 cl. VI Constantinescu Iulia Teodora (49); Ș.g. 3 cl. VI Gabor Domnica (140), Goga Loredana (140); Ș.g. 4 cl. VI Mărculescu Mihai (143). CHIRAFTEI (GALAȚI) Ș.g. 1 cl. V Ance Mihaela (146). CÎMPIA TURZII (CLUJ) Ș.g. 5 cl. VI Crăciun Camelia (241); Ș.g. 2 cl. VII Ioniță Cristina Elena (87). CÎMPINA (PRAHOVA) Ș.g. 4 cl. VI Ghiță Popa Mihaela (97), Rogoz Mira (80), Sîrbu Andreea (73). CÎMPULUNG MOLDOVENESC (SUCEAVA) Ș.g. cl. II Bălan [illegible] (221). CÎMPULUNG MUȘCEL (ARGEȘ) Ș.g. 7 cl. V Potoceanu Sorana (42), cl. VII Rădu Floriana Daniela (133), Rusu Alice (193), Rusu Anda Marina (97). CLUJ-NAPOCA (CLUJ) Ș.g. 2 cl. II Popescu Mircea (97); Ș.g. 4 cl. VI Timbulea Adela (230); Ș.g. 6 cl. VI Pop Codruța Cosmina (110), cl. VII Olisteș Ovidiu (98); Ș.g. 21 cl. VI Funar Sabin (30); Ș.g. „M. Eminescu" cl. V Riza Laura (30); Lic. „N. Bălcescu" cl. V Pârlea Luciana (65); Lic. mat. fiz. 2 cl. X Socaciu Ioan Tiberiu (68). CONSTANȚA (CONSTANȚA) Ș.g. 12 cl. VI Sărac Aldea Laura (272), Soghiu Anca (10); Ș.g. 16 cl. V Stoiciu Mihai (100), cl. VI Nițu Alina (20), cl. VII Asimit Alexandru (97); Ș.g. 24 cl. V Toc Elena Loredana (76); Ș.g. 37 cl. V Crăciun Daniela (25), Cozma Nadia (25), Nacu Diana (20), Stanciu Ionela (25); Ș.g. 39 cl. IV Iordache Brândușa (80); Lic. ind. 10 cl. IX Valahu Dan (84). CORABIA (OLT) Ș.g. 3 cl. VI Ciurea Bogdan (82); Ș.g. 4 cl. VI Delcia Hermina (65). Simion Artur (95). CRAIOVA (OLT) Ș.g. 2 cl. V Medava Simona (128), Păun Narcis Iulian (98), Popescu Florin (33), Radovici Ionuț (79), Rădulescu Adrian Dan (76), Ștefan Silvia (80); Ș.g. 5 cl. VI Bărboiu Monica (120), Bobină Mihaela (120), Dumitrașcu Eugen (67), Motorga Monica (116); Ș.g. 9 cl. V Guță Simona (100), Iordache Irina (100), Matecescu Dorina (103); Ș.g. 11 cl. VIII Geru Dana (90), Neniu Mădălina (120); Ș.g. 21 cl. VI Anculia Mihaela (100), Tutunea Gabriela (120), cl. VII Andreescu Georgiana (97), Badea Mirela (100), Ene Roxana (93), Florea Andra (74), Florescu Ramona (97), Lică Lavinia (69), Perș Oana (77), Răceanu Ruxandra (100), Stan Laura (100); Ș.g. 32 cl. VI Diaconu Adina (120); Lic. „Fr. Buzești" cl. V Crăciun Ana-Maria (60), cl. VI Bunu Janina Elena (77), Dumitrescu Dan (145), Dumitrescu Mădălina (200), cl. VII Zanfir Mirel (165). CUDALBI (GALAȚI) Ș.g. 1 cl. VI Tașcă Tinela (97), cl. VII Dediu Lucian (73), Onofrei Maricel (80), Palade Ana-Maria (80). CUGIR (ALBA) Ș.g. 2 cl. VII Borza Bianca (95). CURTEA DE ARGEȘ (ARGEȘ) Ș.g. cl. VI Cosma Iuliana (99), Nemeșan Nicoleta (81). CURTEA DE ARGEȘ (ARGEȘ) Ș.g. 1 cl. VI Bulac Mariana (84), Chirvasiu Andreea (83), Stelciu Gabriela (85); Ș.g. 3 cl. VII Puteanu Horațiu Daniel (80); Ș.g. 4 cl. VI Ilca Alexandru (167); Ș.g. 6 cl. VI Dobrin Adrian (30); fără mențiune de școală și clasă: Vasilescu Irina (39).

DANEȚI (DOLJ) Ș.g. cl. VII Antonie Cătălina-Irina (120). DARABANI (BOTOȘANI) Ș.g. 1 cl. V Boariu Sabin (140), Caldare Petronela (75), Chițan Simona (132), Crăciun Mirela (125), Hriței Alexandru (70), Ilaș Cristina Simona (90), Onciu Nina (130), cl. VI Alonese Otilia (78), Barbacariu Silviu (104), Ciobotaru Lăcrămioara (219), Crețu Letiția Marcela (103), Hriț[illegible] Cristian (124), Hriței Cătălina Oana (177), Lazăr Răzvan (123), Plămadă Mihaela (106), Scu[illegible]



Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Beatrice (95), Sărdaru Georgeta (109), Sbughea Elena (120), Vasiliu Simona (130); Ş.g. 10 cl. V Andrei Aura (69), Chiscop Iulia (30), Dinu Mihaela (72), Farmatu Simona (79), Hohorga Ana-Maria (77), Olaru Costel Constantin (45), Oţălaş Mihaela (80), Petcu Dan (66), cl. VII Mitroi Mihaela (74), Stamate Mihaela (72); Ş.g. 17 cl. V Drăgan Aurelia (50). Toma Florentina (45); Ş.g. 18 cl. V Cozianu Irina (105); Ş.g. 24 cl. V Caspiroschi Ana (96). Crihană Valentina (97), Grigoraş Marian (100), Haraga Cristian (100), Hodorogea Ionuţ (98), Mihăilă Andreea (94), Nat Roxana Cristina (85), Voicu Liliana (84), cl. VI Codrescu Andreea (109), Bodeanu George (75), Budei Simona (99), Pugaciv Mihaela (90), cl. VII Tănăsescu Camelia (96), Nat Laurenţiu Cristian (150); Ş.g. 25 cl. V Calomfir Marilena (100), Coţobei Anişoara (100), Gheorghe Teodor (100), Iftimi Elena (83), Mihordea Magdalena (85), Nuinim Liliana (74), cl. VI Andrei Alina (120), cl. VII Mocanu Andreea (158), Sofiniuc Gabriela (140), cl. VIII Andrei Carmen (120); Ş.g. 26 cl. VI Hurjui Adrian (130); Ş.g. 28 cl. V Bogdan Irina (99), Burlacu Luminiţa (91), Cosma Otilia (82), Florea Bogdan (235), Florea Monica (109), Macovei Andreea (50), Micu Gabriel (109), Neagu Mădălina (100), Nicoară Eugen (107), Pascal Mădălina (91), Palaghian Gabriel (99), Pădicuţ Victor (99), Popescu Cezar (109), Savin Christine (108), Săndică Ovidiu (78), Toc George (105), Veduţă Alina (216), cl. VI Simion Claudiu (175), cl. VII Adam Gabriela (116), Asafti Ioan (180), Bonţoş Ionuţ (176), Budur Monica (261), Bulza Valentin (76), Butunoi Laura (135), Caşu Elena (150), Ceapchi Cornel (70), Cernişoru Cristian (180), Costeanu Viorel (120), Cotoranu Monica (120), Cristofor Adelina (165), Domniţeanu Adriana (133), Dragomir George (170), Elinschi Ella (150), Gregoratii Mihuţ (147), Gurău Liviu (115), Ichim Bogdan (110), Kaldiman Liviu (20), Kordeanu Mihai (145), Krauser Mădălina (304), Mihalcea Mihaela (111), Modiga Edeta (177), Niculescu Mona (153), Panamarciuc Nadiana (137), Pălimaru Remus (105), Popovici Elena (160), Racoviţă Bogdan (180), Stanciu Silvia (59), Togan Anamaria (150), cl. VIII Călucanu Doru (180), Ionaşcu Bianca (243); Ş.g. 29 cl. V Nipea Gabriela (60); Ş.g. 38 cl. V Bilauschi Ana-Maria (80); Ş.g. 40 cl. III Purdilă Octavian (230); Ş.g. 42 cl. V Iors Carmen (50). **GALSA** (ARAD) Ş.g. cl. VI Mateş Valentina (59). **GALVA** (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Ş.g. cl. V Urs George (64). **GĂIEŞTI** (DÎMBOVIŢA) Ş.g. 6 cl. VI Mîinea Virgil (56), cl. VII Velicescu Sorina (171), cl. X Mîinea Marius (134). **GHEROGHE DOJA** (IALOMIŢA) S. g. cl. VI Rotaru Elena Nicoleta (166). **GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ** (BACĂU) Ş.g. 5 cl. V Cozma Alina (100). **GHERLA** (CLUJ) S. g. „A. Ipătescu" cl. IV Costea Răzvan (170), cl. V Ţarţa Alin (280). **GURA HUMORULUI** (SUCEAVA) Ş.g. 2 cl. VI Ungureanu Emil (100). **GURGHIU** (MUREŞ) Ş.g. cl. V Anghel Daniela (60), Moldovan Mihnea (60), cl. VII Truţia Marius- Mircea (74).

**HAŢEG** (HUNEDOARA) Ş.g. 1 cl. V Purece Radu (100); Ş.g. 2 cl. VI Laza Cristian (86). **HITIAŞ** (TIMIŞ) Ş.g. cl. VII Sătulu Cosmin (77). **HOMOVICIU** (PRAHOVA) Ş.g. cl. V Coman Viorica (300). **HUMULEŞTI** (NEAMŢ) Ş.g. 3 cl. V Stan Constantin (172). **HUNEDOARA** (HUNEDOARA) Ş.g. 3 cl. IV Nistor Anca (140). **HUŞI** (VASLUI) Ş.g. 2 cl. V Blinda Anca (70), Harmagea Nicoleta (64), Matei Magdalena (70), Oprişan Manuela (67), Păvăloi Ciprian (50), Pleşoianu Roxana (80), Sîrbu Gabriela (70), cl. VI Antoni Iulian (80), Bărbuţă Anca (80), Chitic Iulian (74), Huştiuc Dan (74), Istrate Dana (71), Marcu Ciprian (74), Melinte Ciprian (78), Mihu Daniel (70), Milcu Mihaela (89), Neculau Daniel (74), Solomon Claudia (74); Ş.g. 3 cl. V Iakob Anastasia Magdalena (60).

**IAŞI** (IAŞI) Ş.g. 3 cl. VI Orzan Simona (178); Ş.g. 6 cl. VII Dumea Paul-Eduard (110); Ş.g. 7 cl. VI Ivanovici Andreea (80); Ş.g. 10 cl. IV Lazăr Mircea (149); Ş.g. 11 cl. VI Arsintescu Dorin (210); Ş.g. 12 cl. II Ciobanu Cristina (88), cl. IV Gologan Gheorghe (370); Ş.g. 13 cl. IV Cucioreanu Magdalena (248); Ş.g. 23 cl. III Pletea Dan Alexandru (165); Ş.g. 31 cl. II Căşlaru Ciprian-Mihai (50), Dimitriu Ciprian-Vlăduţ (50), Dospinescu Sebastian (107), Gănescu Sorin (90), Leibu Marius (109), Trifan Mircea (59), Ursache Florin (70), Ursache George (59), Zlate Anca (45), cl. IV Alexandrescu Teona (345); Lic. „M. Eminescu" cl. VI Tofan Ciprian (90); Lic. „G. Ibrăileanu" cl. VI Andronescu Raluca (66), Boişteanu Ioana (64), Iovu Cristina (177), Jerea Oltiţa (39); Lic. Inf. cl. IX Turcanu Cristian (276); Lic. „Naţional" cl. V Apetrei Mihaela (98), Butnaru Raluca (110), Căruceru Alina (126), Constandachi Liliana (77), Hian Radu (72), Ilie Cosmin (87), Lăpuşneanu Cristina (190), Radu Cristina (277), Simion Raluca (89), Sipoteanu Corneliu (97), cl. VI Voicu Daniela (60), cl. VIII Voicu Ovidiu (120); Lic. „C. Negruzzi" cl. V Apetrei Radu (67), Ciornei Alina (80), Hogea V. Vlad-Gabriel (338), Pop Iulia (230), Popovici Alexandru Ştefan (355), Savin Cosmina-Ioana (90), Savin Laura-Mihaela (102), Scripcaru Gabriel (77), Ursache Marius (77), cl. VI Felea Violeta (177), Precupeanu Codrin (218), Radu Daniel (113), Savin Mihai (275), Vasilache Teona (45), cl. VII Cheleman Oana (118), Felea Maura (261), Nica Dana (125), Petruş Adrian (78), Răducanu Ştefan-Dumitru (110), Slătineanu Cătălin (78), cl. IX Vidraşcu T. Cristian (192); Lic. „E. Racoviţă" cl. V Hloetzer Eugen (210), Holdraş I. Ionuţ (70), Hriscu Eugen (160), Motreanu Violica Venera (607), Omer Sevim (201), Slabu Lavinia (202), Timohe Gabi (80), cl. VI Frenţescu Roxana (98), Loghin Georgiana (64), Pop Iulia (168). **INDEPENDENŢA** (CĂLĂRAŞI) Ş.g. 1 cl. V Ene Ileana-Doina (45). **ISACCEA** (OLT) Lic. Ind. cl. VII Glogogeanu Lucia (107). **ISACCEA** (TULCEA) Lic. Ind. cl. IV Mauna Cristina (172), cl. VI Arsenie Marilena (150), Bălan Nelu (10), cl. VII Filip Doina (107), Manua



Scanned with OKEN Scanner

Georgeta (100), cl. VIII Dorosencu Nicoleta (29). **IVEȘTI** (GALAȚI) Ș.g. 3 cl. VI Covrig Gabriel (89), Ionașcu Ileana (100), Soare Cristina (105), Tiron Carmen (62). **IZBICENI** (OLT) Ș.g. 1 cl. IV Pota Camelia (506), cl. V Giulea Cosmin (232). **IZVOARE** (PRAHOVA) Ș.g. 1 cl. VI Coman Viorica (193). **ÎNSURĂȚEI** (BRĂILA) Ș.g. 3 cl. VIII Alexe Daniela (410).

**LEORDINA** (MARAMUREȘ) Ș.g. cl. VI Urda Adela (140). **LESPEZI** (VRANCEA) Ș.g. cl. V Voicu Simona Daniela (60). **LEȚCANI** (ARAD) Ș.g. cl. V Gavrilaș Cătălin (100). **LUDUȘ** (MUREȘ) Ciobanu Ana-Maria (61), Olteanu Ioana (74), Orolan Gianina (88). **LUGOJ** (TIMIȘ) Ș.g. 2 cl. VI Cădariu Liviu (60), Dumitrescu Catin (106), Kovacs Emanuela (95); Ș. g. 3 cl. VI Gallmann Cristina (98); Ș.g. 4 cl. IV Trautman Mihai (80), cl. VII Trautman Ludovic (100); Ș.g. 6 cl. cl. V Greceanu Adina (100). **LUNCA** (BOTOȘANI) Ș.g. cl. VI Murărașu Liviu (140). **LUPENI** (HUNEDOARA) Ș.g. 3 cl. V Gelean Simona Magdalena (130), Chisnes Daniela (70), Kelemen Alexandru (80), Mătăsărean Eliza (84).

**MAIDAS** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cl. V Ranga Flavius (75); **MARGINEA** (SUCEAVA) Ș.g. 1 cl. V Lostun Vasile-Cristian (70). **MĂCEȘUL DE JOS** (DOLJ) fără mențiune de școală și clasă: Chișer Cristian (70). **MĂGURELE** (PRAHOVA) Ș.g. cl. V Bachoș Ciprian (70), Dinu Adriana (89), Manea Nicoleta (90), cl. VI Alexandrescu Dan-Marian (55), Dinu Marius-Andrei (70), Gheorghe Adriana (70), Popa Iulia-Ottonel (67). **MĂLDĂENI** (TELEORMAN) Ș.g. 1 cl. VII Ioaveana Florina (100). **MĂNĂSTIREA CAȘIN** (BACĂU) Ș.g. 1 cl. VII Bălan Marius (80). **MĂURENI** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. 1 cl. VI Boneza Ovidiu-Andrei (72), Chircea Nicoleta (94), Eberencich Gerhard (89), Vintan Nicolae Filip (100). **MEDGIDIA** (CONSTANȚA) Ș.g. 6 cl. V Bararu Nicoleta Aurelia (80), cl. VI Crăciun Daniela (74), Iancu Alina (90), Moleavin Mihaela (78), Mosescu Cristina (49), Stănculete Cosmin (110); Ș.g. 7 cl. VII Dinu Daniela Crina (98); Ș.g. cl. VI Mustățea Elena (80). **MEDIAȘ** (SIBIU) Ș.g. 5 cl. VIII Chiș Mihai (75); Ș.g. 8 cl. VII Popșor Mihaela (50); Lic. „A. Sever" cl. IX Benyi Arpad (316). **MEHADIA** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cl. VI Răstian Adina (135), cl. VII Drăguleseu Anica (86), Giliga Florina (112), Lazescu Maria (134). **METEȘ** (ALBA) Ș.g. cl. VI Popa Felicia-Florina (160). **MIERCUREA CIUC** (HARGHITA) Ș.g. 11 cl. IV Zsombori Gabriella (114). **MIRDIS** (SĂLAJ) Ș.g. cl. VI Pop Cecilia (130). **MIZIL** (PRAHOVA) Ș.g. 2 cl. VII Dumitru Marius (60). **MOINEȘTI** (BACĂU) cl. V Agavriloaie Mihaela-Luiza (90), Berilă Elena-Laura (105); Ș.g. 1 cl. V Diac Petrică (60), Enea Mihaela (120), Mătășel Răzvan (164), Neagu Daniel (78), Tudorache Costinel (99), cl. VI Tomescu Florentina (105), cl. VII Breabnă Anca Nicoleta (270), Ș.g. 2 cl. V Ailincăi Costel (351), Baciu Tereza (57), Bordea Mariana (50), Căldărariu Irina (54), Dragomir Vasilica (56), Gugoașă Radu (75), Neagu Violeta (98); fără mențiune de clasă: Ababei Cătălin (89), Adam Diana (85), Laslău Anca (50). **MORENI** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. 1 cl. V Ionescu Magdalena (90); Ș.g. 3 cl. V Petrescu Corina (47). **MOTRU** (DOLJ). Ș.g. 1 cl. V Mocanu Mihaela (130), Pârlianu Claudia (40), Tomescu Ovidiu (75), cl. VI Grecu Dragoș-Eugen (125), Lolescu Carmen (108), Murgulescu Adriana (166), Șerban Daniel (118), Todea Delia (212), cl. VII Al.Mării Lucian (150), Paicu Marius (206), Părăianu Ramona (139), Răducu Ionela (120); Lic. ind. cl. IX Paicu Laura (241). **MOVILENI** (GALAȚI) Ș.g. 1 cl. VI Ioniță Mândița (79), Rădăcină Marinela (171), Spânu Gabriela (94), cl. XI Tudose Liliana (103). **MUNCELU** (VRANCEA) Ș.g. cl. V Botez Mândița (50), Voineag Viorel (70), cl. VI Barău Vasilica (79), Hupcă Lăcrimioara (120), Istrate Marius (108), Manolache Lăcrămioara (96); fără mențiune de școală și clasă: Turcu Nicu (50). **MURGENI** (VASLUI) Ș.g. cl. V Ionescu Ana-Maria (99), Roșu Mihaela (92), Strătulat Nadia (80), Vrabie Anca (77), cl. VI Carp Iuliana (107), Mateescu Laura (103), Secan Viruca (109), Tiron Marcela (108).

**NAIDAȘ** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cl. V Vintilă Mirela (61). **NĂSĂUD** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Ș.g. 1 cl. II Tebies Cătălin (140); Lic. „G. Coșbuc" cl. X Telcian Adrian (120). **NEGREȘTI-OAȘ** (SATU MARE) Ș.g. 1 cl. V Grecea Rita-Monica (59), cl. VII Feier Constantin (110); Ș.g. 3 cl. V Boc Florin (160), Dicu Camelia (77), Matiș Anamaria-Raluca (120), cl. VI Bancoș Ana-Maria (249), Barbu Raluca (157), cl. VII Fanea Lucian (78). **NEGRU VODĂ** (CONSTANȚA) Ș.g. cl. VI Seitcea Ghiulex-Ghiuner (163). **NICULIȚEL** (TULCEA) Ș.g. cl. V Lungu Cristina (86), Mozilla Dan (50), cl. IV Pilnge Nicoleta (153).

**OCNA MUREȘ** (ALBA) Ș.g. 1 cl. V Crișan Olimpia (19), Dan Ileana Dorina (15). **ODORHEIU SECUIESC** (HARGHITA) Lic. ped. cl. VII Molnar Eva (40). **OLANU** (VÎLCEA) Ș.g. cl. VII Ivașcu Ady Lucian (110). **OLTENIȚA** (CĂLĂRAȘI) Ș.g. 6 cl. V Ciorolanu Mugurel (89). **ORADEA** (BIHOR) Ș.g. 6 cl. VII Tomer Ștefan (266); Ș.g. 8 cl. VII Pop Anca (128); Ș.g. 9 cl. VII Șerban Adriana (870); Ș.g 11 cl. IV Papp Agata (113), cl. V Balasz Fünde (69), cl. VI Papp Peter (55); Ș.g. 14 cl. II Cazan George Emil (40), cl. III Cazan Fulvia (10); Ș.g. 16 cl. VI Molnar Andreea (68), cl. VII Popa Cristina (100); Ș.g. 17 cl. VII Pop Ciprian (164); Lic. ped. „I. Vulcan" cl. VIII Gavriș Gabriela (60). **ORĂȘTIE** (ALBA) Ș.g. 2 cl. V Ceemac Cătălin (80); Lic. „A. Vlaicu" cl. IX Dunu Cătălin (83). **OREAVU** (ALBA) Ș.g. 1 cl. VI Ispas Valeriu (12), Sava Nicoleta (60). **ORLAT** (SIBIU) Ș.g. 1 cl. V Pop Florin (106), Topirceanu Darian (93). **ORLEȘTI** (VÎLCEA) Ș.g. 1 cl. V Lăzărolu Marius (68). **ORȘOVA** (MEHEDINȚI) Ș.g. cl. IV Ilici Miriana (60), Panch Virgil (50), Pirnău Gh. (40), Pirtea Rodica (60), Pupu Dana (30), cl. V



Scanned with OKEN Scanner

Brandibur Claudiu (60), Donecea Adriana (50), Filipescu Ştefan (90), Lepădatescu Ion (50), cl. VI Ivan Carmina (270), Megan Silviu (130), Nedvet Francisc (110), Poraiac Relni (60), Siegens Rozalia (176), cl. VII Deacu Alina (209), Piscureanu Adrian (100), Pirvu Adrian (100), cl. VIII Chiser Valentin (60), Grigore Dan (50), Gulyaş Monica (120), Pepa Codruţa (70). OSTRA (SUCEAVA) S.g. cl. V Popescu Laura (57). OŢELU ROŞU (CARAŞ SEVERIN) S.g. 1 cl. V Tuştean Gabriela (100); Ş.g. 3 cl. V Bobirsc Carmen (80), cl. VI Anculia Geanina (142), Bobirsc Florentina (80).

ŞEICA-MARE (SATU MARE) Ş.g. 1 cl. VII Găvozdea Mariana (120). ŞERBĂNEŞTI (OLT) Ş.g. cl. VII Ciobanu Mihaela (109), ŞIEN-SFÎNTU (BISTRIŢA NĂSĂUD) Ş.g. cl. VII Sileş Darius (67). ŞIMLEUL-SILVANIEI (SĂLAJ) Ş.g. 1 cl. V Anton Carmen Ramona (79), Busuloc Loredana (85), Chirică Ioanu (82), Cristea Viorica (73), Florian Iulia (85), Geiger Teodora (109), Gozman Diana (74), Micaş Mihaela (83), Mikola Andreea (69), Milaş Mihaela Olimpia (108), Pădurean Loredana (91), Perecz Oszkar (92), Pocola Nicolina (82), Pop Nadia (100), Racolţa Cristian (80), Racolţa Ovidiu (80), Silvăşan Roxana (83), Ştefan Liliana (86), Tala Cristian (54). ŞINTEREAG (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Ş.g. cl. V Ciocan Claudiu Andrei (33), Gheorghi Andreea Anca (75), Taloş Viorel (88). ŞIRIA (ARAD) Ş.g. cl. VI Guban Marius (60). ŞOMCUŢA-MARE (MARAMUREŞ) Ş.g. 1 cl. VI Achim Florin (198), Costin Bogdan (120), Dod Vivian (121), Luca Florina Mirela (398), Mureşan Mihaela (99), Naghi Rodica (290), Pintilie Florin (130), Popa Gabriel (104), Vida Luminiţa Ana (131), cl. VII Buda Alexandru (90), Dinu Peter (110), Dorca Daiana (100), Gherman Ligia Gabriela (150), Prună Ioan-Dorin (104), Prună Ştefan-Paul (109). ŞTEFAN CEL MARE (CĂLĂRAŞI) Ş.g. cl. V Matei Geanina (40), Miacu Emilia (40), Tudor Tatiana Simona (39), cl. VI Dinu Elena Daniela (60), Ionel Georgeta (45), cl. VII Fianu Florentina Viviana (50), cl. VIII Fianu Leonard (50). ŞTEFĂNEŞTI (ARGEŞ) Ş.g. 2 cl. VI Muşat Iulia Magdalena (188). ŞTEFĂNEŞTI (BOTOŞANI) Ş.g. cl. V Olaru Irina (79).

TARCAIŢA (BIHOR) Ş.g. cl. V Făt Ioan (75). TĂŞNAD (SATU MARE) Ş.g. cl. IV Netea Elena (70), Netea Aurel (113). TECUCI (GALAŢI) Ş.g. 5 cl. II Negtei Iulian (110), cl. V Andrei Irina (100), Anghel Monica (103), Apreotesei Gina (30), Bălan Radu (91), Boeş Viorel (80), Bulgaru Cristi (70), Butinică Radu (109), Chicoş Ramona (110), Cidu Elena (55), Crăciun Mihaela (70), Duţă Gabriela (55), Dobre Mihaela (68), Gorgan Roxana (76), Ifrim Mariana (99), Mititelu Nicolae (86), Negură Elena (66), Pătraşcu Daniela (79), Popirda Anca (110), Roşca Mirela (116), Tăpeanu Mariana (81), Virgolici Adrian (58), Zotinca Mariana (76), cl. VI Luca Viorica (84), Pavel Radu (121), Pirvu Ramona (95), Sava Gică (65), Stoica Marilena (103), Tălmaciu Cornelia (30), Tiron D. (65), Vrincean Mirela (110), cl. VII Atomei Crina (70), Berescu Florin (56), Chiscop Cătălina (71), Constantin R. (66), Corodeanu C. (72), Dănăilă Laura (96), Gherasim Carmen (67), Lupu Diana (79), Nedici Mihai (63), Radu Mihaela (110), Roşu Marian (150), Savastre Mihai (80), Socaciu Ciprian (76), Trifan Ionel (78), Vergea Mariana (60), Vlad Mona (56); Ş.g. 6 cl. IV Mihalache Magda (120), cl. V Mihalache Florin (58), Mihalache Gina (150), cl. VI Todea Adriana (80); Ş.g. 10 cl. V Tudor Daniela (30), cl. VI Apostu Adrian (150), Ciochină M. (97), Creangă Cornel (79), Manea Ciprian (87), Mitofan Cristina (98), Morozan Geanina (83). TIGVENI (ARGEŞ) Ş.g. cl. V Piele Daniela (85), cl. VI Badea Doina (76), Ciocănel Cristina (88), Deaconescu Carmen (89), Honeag Elena (85), Ionescu Mihai (72). TIMIŞOARA (TIMIŞ) Ş.g. 6 cl. V Morar Venera (88), Szucs Szilvia (86), cl. VI Codarcea Gabriela (120), Dunarinţiu Lavinia (36), Jivoi Violeta (79), Muţulescu Adrian (66); Ş.g. 7 cl. VI Bobu Simona (90), cl. VII Demjan Tünde (84), Pleşca Cleopatra (43), Terbiş Gabi (100), Timofie Daiana (55); Ş.g. 11 cl. VI Gonceari Paula (135); Ş.g. 16 cl. VI Elescheri Camelia (178), Hava Cristina (97); Ş.g. 22 cl. IV Tilihăzan Titus (300); Ş. g. 26 cl. V Lazăr Cristina (24), cl. VII Ugarcovici Ilie (268); Lic. mat. fiz. 1 cl. IX Foral Iosif (78); Lic. ped. cl. IV Aconi Valentin (80); Lic. „C. D. Loga" cl. V Agrigoroaie Victor (100), Anghelescu Lucian (120), cl. VI Berghian Adina (95), cl. VII Buduhos Ioan (166), Ciotescu Raoul (166), cl. VIII Ciatescu R. (249), Iordache Cristina (170); Lic. „Nicolaus Lenau" cl. V Decean Flaviu (120), Dragomir Larisse (215), Dragomir Lavinia (150), Nisztor Ludovic (125). TITU (DÎMBOVIŢA) Ş.g. cl. V Badea Cristian (89), Cucuteanu Mihaela (115), Iancu Marian (126), Ioniţă Oana (149), Niţescu Cătălin (150), cl. VI Costică Cristian (100), cl. VII Constantin Mihaela (121), Lazar Raluca (123), Oprea Loredana (115), Rozner Ramona (105), Soare Georgiana (131), Vlad Roxana (135). TÎRGOVIŞTE (DÎMBOVIŢA) Ş.g. 1 cl. VI Ionel Adrian (48); Ş.g. 2 cl. IV Dinu Cristian (150), cl. VI Aloanei Andreea (110), Pătru Elodi (40); Ş.g. 5 cl. V Cucul Gabriela (90), Oprea Dragoş (89), Oprişoreanu Raluca (80); Lic. ind. 6 cl. VI Popoacă Ana-Maria (90). TÎRGU FRUMOS (IAŞI) Ş.g. cl. V Grigoraş Laura (20), Mureteanu Valentin (95), cl. VI Asofiei Simona (10). TÎRGU JIU (GORJ) Ş.g 2 cl. VII Bertha Cristian (77), Paltăr Felicia (76), Macavei Teodor (75), Mărgărit Paul (73), Virjeu Camelia (77); Ş.g. 8 cl. IV Titus Sorin (80); Ş.g. 12 cl. IV Cociu Cristian (90), Uta Daniela (70), Sega Laurenţiu (56), Vişan Bogdan (59), Vlădoiu Marius (67). TÎRGU OCNA (BACĂU) Ş.g. 1 cl. VII Bejenaru Ioan (239), cl. VIII Zidăriţa Cristian (47). TÎRGU MUREŞ (MUREŞ) Ş.g. 2 cl. V Tomus Ioana (77); Ş.g. 3 cl. VI Butean Ancuţa (262), Boar Gh. (165), Morar Ovidiu (170), Oltean Claudia (168), Pop Nicoleta (170), cl. VII Moişoiu Raluca (117); Ş.g. 10.

Scanned with OKEN Scanner

cl. VI Teci Ovidiu (203); Ş.g. 11 cl. V Comesz Attila (34), Gal Csaba (50). **TULCEA (TULCEA)** Ş.g. 4 cl. IV Largu Emil (80), cl. VI Doruche Adrian (120); Ş.g. 5 cl. IV Popescu Nicolae (228), cl. V Tudorică Laura (120); Lic. „S. Haret" cl. VI Bafane Iulian (173), Coreţchi Irina (118), Coreţchi Oana (110), Guluglue Gelu (263), Laiu Anca (121), Lescencu Marilena (154), Olteanu Cătălina (118), Voicu Mihaela (86), cl. VII Fătu Doina (90), Filoi Florian (97), Popescu Raluca (80), Tudose Marian (100), Urseă Elena (90). **TULGHEŞ (HARGHITA)** Ş.g. 1 cl. V Fulga Simona (60), Gălbază Ana (68), Ungureanu Camelia (60). **TURDA (CLUJ)** Ş.g. 2 cl. V Redean Călin (77), cl. VI Codrea Violeta (80), Mic Simona (80), Nemeş Gheorghe (80); Ş.g. 6 cl. V Munteanu Ana Maria (80), Răcean Adriana (80), cl. VI Dob Oliviana (90), Sîrbu Dorin (200), Vanca Florin (90), cl. VII Bucur Mihaela (144); Ş.g. 8 cl. VI Bercea Camelia (130), Casoni Gelu (110), Călăr Camelia (100), Călugăr Claudia (120), Chiotean Emil (100), Cioban Călin (96), Ciucur Ioana (120), Creţ Daniela (90), Gherman Ana (120), Vardan Ioana (78). **TURNU MĂGURELE (TELEORMAN)** Ş.g. 2 cl. V Blejan Mariana (82), cl. VII Ichim Ana Maria (89). **TURNU SEVERIN (MEHEDINŢI)** Ş.g. 2 cl. V Sîrbu Ioana (84), cl. VI Sîrbu Manuela (76).

**VADURI (NEAMŢ)** Ş.g. cl. VI Albu Daniel (70), Bălan Alina (60), Coteanu Monica (57), Creţu Maria (47), Harpa Vasile (65), Olariu Mihaela (47), Poboraniuc Violeta (80), Scuciu Nicoleta (80). **VASLUI (VASLUI)** Ş.g. 3 cl. VII Găbureac Carmen Mihaela (105); Ş.g. 4 cl. V Adinel Mihaela (114), Avram Roxana (116), Gache Roxana (225), Pastramagiu Răzvan (95), Piciorea Anca (105), Zavatin Oana (95); Ş.g. 5 cl. V Bahrim Cezar (70), Diaconu Dana (85), Gavan Dana (110), Mitescu Adrian (162), cl. VI Ghinghină Florin (243), cl. VII Romaşcu Cezar (161); Ş.g. 6 cl. VI Acsinte Violeta (120), Adam Laura (164), Antonie Adrian (138), Bălan Sorin (100), Bunescu Mirela Irina (260), Chiriac Dan (115), Ciucureanu Monica (117), Cojocaru Alina (90), Coşmagiu Paula (111), Darie Angela (200), Eşanu Carmen (158), Galiţa Anda (88), Ioan Nicolae Doru (78), Moişanu Adina (100), Moişanu Sorin Iurin (181), Parpalea Laurenţiu (88), Pîndaru Mihaela (174), Pop Began (100), State Ana Camelia (250), cl. VII Abăeţilor Alina (115), Asoltani Mona-Alina (172), Beldiman Mona-Amalia (207), Cîmpeanu Carmen (210), Coman Elena (192), Drehuţă Cristina (100), Filip Laurenţiu Constantin (149), Furcoi Corina Katerina (77), Grosu Carmen (184), Haraga Simona (178), Matei Dan Constantin (82), Negara Laura (90), Simbotin Dan (156), Tibulcă Elena (80), Tincu Mihaela Dana (199), Zaharia Mihaela (78); Ş.g. 7 cl. VII Bălan Gabriel (15). **VATRA DORNEI (SUCEAVA)** Ş.g. cl. VI Straton Daniela (80). **VĂDENI (GALAŢI)** Ş.g. cl. V Cristofan Aurelia (35). **VĂLENII DE MUNTE (PRAHOVA)** Ş.g. 1 cl. VI Bogdan Emil Gh. (66); Ş.g. 3 cl. VI Banu Mihaela (68), Florescu Răzvan (79), Manole Constantin (100); Lic. ind. „N. Iorga" cl. IX Bulacu Daniel (129). **VICTORIA (BRAŞOV)** Ş. g. cl. V Bucurenciu Iancu Valeriu (90), cl. VI Bucurenciu Andreea (109); Lic. ind. chimie cl. IX Baciu Angelica (98), Berghea Cristian (215) Bucşa Andrei (193), Bucşa Doru (82), Diplaş Mihai (219), Florea Radu (208), Grigorovici Radu (201), Klein Laura (139), Liţă Andrei (210), Muntean Lucian (82), Oană Mihaela (140), Pascu Dan (86) Stoian Costel (157). **VIDELE-TĂMĂRĂŞEŞTI (TELEORMAN)** Ş.g. 2 cl. V Bulat Cristina (55). **VIDRA (SECT. AGR. ILFOV)** Ş.g. 301 cl. VI Tuţă Roberto (90). **VIŞEU DE SUS (MARAMUREŞ)** Ş.g. 1 cl. V Martiniuc Aurel (90), cl. VI Papandron Axente (87), cl. VII Grigor Florin (246). **VIŞINEŞTI (DÎMBOVIŢA)** Ş.g. cl. V Codreanu Diana (341). **VÎNĂTORI-NEAMŢ (NEAMŢ)** Ş.g. 1 cl. VI Afloarei Monica (155), Humulescu Anamaria (160), Maxim Bianca (175), Tănase Elena (196), Ursachi Ceanina (176). **VÎRSOLT (SĂLAJ)** Ş. g. cl. VI Mureşan Adela (85). **VORNICENI (BOTOŞANI)** Ş.g. 3 cl. IV Sîrbu Adina (132), cl. VII Sîrbu Cristian (166). **VRÎNCIOAIA (VRANCEA)** fără menţiune de şcoală cl. XI Soare Alin Marian (27). **VULCAN (HUNEDOARA)** Ş.g. 4 cl VI Vass Alexandru (311); Ş.g. 6 cl. V Martin Adelina (76), Petrescu Bogdan (55), Pop Bianca (47), Sanfira Diana (72); fără menţiune de şcoală şi clasă: Iosif Cristian (60).

**ZALĂU (SĂLAJ)** Ş.g. 1 cl. V Cioban Mihaela (58), Floca Monica (128), Orăşan Adrian (90); Ş.g. 4 cl. VI Lehene Anton (151), Prodan Radu (60); Ş.g. 5 cl. VI Ola Mihaela Bianca (90), Pop Diana Elena (136), Pop Iustin Daniel (78); Ş.g. 6 cl. IV Opriş Ovidiu Dumitru (227), cl. VIII Opriş Oliviu Vasile (173); fără menţiune de şcoală: cl. V Jeler Viorica (70); Lic. mat. fiz. cl. IX Bălănean Tatiana (60), Costea Viorel (88), Doroczi Adriana (70), Dreptate Daniel (77), Grindean Mihai (106), Haiduc Sorana (95), Maigrădean Călin (129), Man Mircea (92), Margin Vasile Lucian (66), Marian Monica (65), Olaru Sebastian (22), Părău Călin (40), Prodan Alina (76), Samşodan Adriana Mariana (70), Szentkiralyi Ştefan (96), Welegdi Mariana (75), Iliaş Doredana (66), Urs Sorina (98), Uţiu Xenia (99), Vlaicu Cosmin (80). **ZĂRNEŞTI (BRAŞOV)** Ş.g. 1 cl. V Drăgan Iuliana (79), Petraş Viorica (68), Stancu Oana (76); fără menţiune de şcoală: cl. VI Muraru Marian Laurenţiu (80).

I. P. Informaţia c. 1157

Index 43400

Lei 3,50

Scanned with OKEN Scanner